Towards the axiomatic systems of the third millennium in Mathematics, Logic, and Computer Science

Ennio De Giorgi, Marco Forti and Giacomo Lenzi

VERSO I SISTEMI ASSIOMATICI DEL 2000
IN MATEMATICA, LOGICA E INFORMATICA[1] ricerca parzialmente finzanziata da fondi M.U.R.S.T. ex 40 % 60%.

Ennio De Giorgi, Marco Forti, Giacomo Lenzi

Introduzione

Nella sua relazione, Nelson ha esposto brillantemente le sue idee di matematico che ha abbandonato quella che egli chiama "religione pitagorica" e indica nuove strade su cui a suo avviso dovrebbero avviarsi i matematici. Anche noi esploriamo da vari anni le possibili vie future della ricerca matematica, logica, informatica, ma in una prospettiva diversa (vedi [6-10,12-15,24,25]). Nelson, sviluppando sistematicamente la prospettiva formalistica, arriva a identificare la Matematica con lo studio delle sue formule, negando ogni prospettiva semantica che a queste formule associ numeri, insiemi, spazi, funzioni, ecc. Noi riconosciamo il ruolo insostituibile delle formule nella elaborazione e nella comunicazione delle idee matematiche e nel confronto della Matematica con altri rami del sapere. Sappiamo pure che le stesse manipolazioni di formule, e in particolare le regole di deduz ione, sono oggetti molto interessanti della Matematica, ma non intendiamo ridurre tutta la Matematica alla manipolazione di formule. In un certo senso la nostra posizione rispetto alle formule è simile più a q uella dell'antico navigatore o esploratore rispetto alle carte geografiche, indispensabili per navigare e per trasmettere agli altri le s coperte fatte durante la navigazione, che a quella del moderno collezionista di carte geografiche che egli considera partic olarmente pregiate.

Nelson ha ricordato le difficoltà incontrate da Hilbert e Brouwer nei loro tentativi di trovare una "filosofia" soddisfacente in cui collocare in modo "naturale" gli oggetti usualmente considerati dai matematici (vedi [3,22,23]). Noi non ignoriamo queste difficoltà, ma non dimentichiamo nemmeno le parole di Shakespeare "vi sono più cose in cielo e in terra di quante ne sogni la tua filosofia": pensiamo che non convenga dichiarare un oggetto inesistente per il solo fatto che non si è trovata una filosofia soddisfacente in cui collocarlo. Nelson in un certo senso invita i matematici a "sognare di meno", a non attribuire per esempio un significato troppo "realistico" ai più bei teoremi riguardanti gli spazi ad infinite dimensioni di Hilbert e di Banach: noi invece ricordiamo sempre le parole di

[1] *

Shakespeare e quindi pensiamo che lo scienziato che vuole comprendere le realtà esistenti fra cielo e terra debba "sognare di più" e non sognare di meno (vedi [16]). Pensiamo che i maggiori progressi della scienza siano il frutto di alcuni "sogni meravigliosi": i numeri complessi, il calcolo infinitesimale, la meccanica di Newton, la relatività generale, la meccanica quantistica, ecc.; pensiamo pure che una parte consistente dell'attuale lavoro dei fisici sperimentali consiste nella ricerca di qualche traccia visibile di alcuni oggetti "sognati" dai fisici teorici.

Noi apprezziamo un'elegante soluzione esplicita di un bel problema matematico, un metodo di calcolo semplice e veloce, sappiamo che possono rappresentare un grande progresso rispetto alla semplice dimostrazione di un teorema di esistenza, ma non pensiamo che serva alla ricerca di soluzioni esplicite e metodi di calcolo efficienti la rinuncia a quello che Hilbert ha chiamato il "paradiso di Cantor", popolato da insiemi più o meno strani e da infiniti di ogni ordine. Piuttosto vorremmo immaginare il "paradiso di Cantor" ancora più ricco e "colorato" di quanto lo pensasse Cantor, popolato da oggetti delle più varie specie: insiemi, collezioni, operazioni, formule, linguaggi e loro interpretazioni semantiche, variabili, categorie, numeri standard e non standard, algoritmi, proposizioni, predicati, logica classica ed altre logiche, ecc. Naturalmente a questa libertà di sognare corrisponde il dovere di tradurre i sogni in assiomi, congetture, teoremi formulati con la massima chiarezza ed il massimo rigore (e quindi in ultima analisi comprensibili e giudicabili criticamente anche da parte di chi non si muove in una prospettiva realistica ma in una rigorosamente formalistica). Il dialogo tra "formalisti" e "sognatori" su questo tema non solo può svolgersi nella massima amicizia e comprensione ma può per gli uni e per gli altri essere fonte preziosa di idee molto interessanti. Aggiungiamo anzi che gli assiomi che tra poco enunceremo si prestano a essere discussi criticamente ed eventualmente modificati, arricchiti, migliorati da parte di studiosi vicini a qualsiasi corrente della Filosofia della Scienza. Per questo è importante che un discorso generale riguardante Matematica, Logica, Informatica sia formulato in modo molto più chiaro di un discorso specialistico. Infatti il primo discorso deve essere comprensibile e criticabile da parte di interlocutori molto vari, mentre per il secondo è sufficiente che sia compreso da un ristretto gruppo di specialisti. In particolare un discorso generale sui concetti basilari della Matematica, della Logica e dell'Informatica non deve essere comprensibile solo da parte di un ristretto numero di "specialisti dei Fondamenti" ma deve essere accessibile a tutti gli studiosi di discipline scientifiche e umanistiche che siano animati da quel sentimento che gli antichi chiamarono filosofia, cioè amore della Sapienza.

Per questo motivo ci sembra improprio classificare il nostro lavoro nella categoria "Fondamenti della Matematica": non intendiamo rifondare la Matematica su basi più solide, ma piuttosto cercare qualche sentiero nuovo nella foresta della Matematica, della Logica e dell'Informatica senza rinunciare ad alcuna delle più geniali intuizioni degli studiosi che hanno tracciato le prime strade in questa foresta, ancora a nostro avviso in gran parte inesplorata. In sostanza non abbiamo l' ambizione di iniziare la redazione del "Bourbaki del 2000", che sarebbe inevitabilmente un' opera di dimensioni e durata incontrollabili (cfr. [28]), dovendo abbracciare Matematica, Logica, Informatica (discipline che oggi debbono essere considerate insieme almeno nelle loro idee fondamentali), ma crediamo di aver individuato una prima base assiomatica molto semplice, chiara e "naturale" su cui dovrebbe essere possibile innestare i vari rami di queste discipline, per esempio analisi standard ed analisi non standard, logica classica ed altre logiche, teorie degli insiemi, calcolo delle probabilità, categorie, algoritmi, linguaggi, sintassi, semantica, ecc. Su questa base dovrebbe essere possibile innestare anche alcune idee fondamentali di altre discipline scientifiche ed umanistiche, dando un piú ampio respiro alla riflessione sulle relazioni esistenti tra vari campi del sapere. Se infatti è necessario riflettere sulle piú significative applicazioni della matematica e sulle idee suggerite ai matematici dal confronto con varie discipline scientifiche, tecniche, umanistiche, artistiche, ecc., conviene pure pensare alle ragioni piú profonde dei grandissimi risultati realizzati attraverso la collaborazione tra matematici ed altri studiosi.

Passiamo ora a un'esposizione che speriamo semplice e chiara della prima base assiomatica su cui innestare in modo "naturale" i concetti fondamentali di molte discipline scientifiche e umanistiche. Essa è stata suggerita da varie riflessioni sui concetti fondamentali della Matematica, della Logica e dell'Informatica (vedi ad esempio [1,4,22,26,27,29,30]) e da molte conversazioni con studiosi di diverse discipline (Matematica, Fisica, Logica, Informatica, Biologia, Storia, Filosofia, Economia, Teologia, ecc.) che hanno fatto emergere l'opportunità di superare il cosiddetto "riduzionismo insiemistico", cioè la tendenza a ridurre tutta la Matematica alle teorie degli insiemi, cercando invece di inserire le teorie matematiche e possibilmente anche altre teorie scientifiche in un quadro più ampio, in cui sia possibile un confronto critico delle idee fondamentali delle diverse discipline. Certamente le teorie degli insiemi proposte da Cantor, Zermelo, Gödel, Bernays, Von Neumann e altri grandi matematici di questo secolo (vedi [2]) restano tra le espressioni più elevate dello spirito umano (paragonabili per esempio alla meccanica di Newton, alla relatività generale, alla meccanica quantistica, alla Divina Commedia di Dante, al Mosè di Michelangelo, alle musiche di Bach, Mozart, alle tragedie di Shakespeare ecc.), tuttavia per comprendere meglio le principali idee della Matematica, della Logica e dell'Informatica sembra opportuno inserirle in un quadro più generale dominato dalle due idee di *qualità* e *relazione*. Queste discipline, come del resto le discipline fisiche, chimiche, biologiche, economiche, linguistiche, ecc., considerano infatti *oggetti qualitativamente diversi* e studiano *relazioni tra tali oggetti*. Sembra quindi ragionevole proporre come premessa generale all'esposizione di tali discipline e al confronto delle loro idee fondamentali un breve e semplice sistema di poche *qualità* e *relazioni* di carattere generale che dovrebbero costituire la base solida e flessibile su cui inserire qualità e relazioni più specifiche delle varie scienze.

Capitolo 1: Qualità e relazioni fondamentali

Tratteremo in questo capitolo le prime idee fondamentali riguardanti qualità e relazioni intese come concetti primitivi. Notiamo che con questa accezione di concetto primitivo non intendiamo rispondere né al problema psicologico di quali siano le idee che per prime si presentano alla mente del bambino, né il problema storico di quali siano state le idee che per prime l'umanità ha considerato; intendiamo semplicemente che tali concetti non sono riconducibili (mediante opportune definizioni) ad altri concetti precedentemente introdotti.

Introduciamo dunque come concetti primitivi l'idea di "*qualità*" e l'idea di "*godere di una data qualità* ". Conveniamo che dati un oggetto x di qualsiasi natura ed una qualità q, quando scriveremo

$$q\ x$$

intenderemo dire che "x gode della qualità q". In questo capitolo introduciamo sette qualità fondamentali: $Qqual$, $Qrel$, $Qrelb$, $Qrelt$, $Qrelq$, $Qrun$, $Qrbiun$ aventi i seguenti significati:
$Qqual\ x$ vuol dire che x è una *qualità*;
$Qrel\ x$ vuol dire che x è una *relazione*;
$Qrelb\ x$ vuol dire che x è una *relazione binaria*;
$Qrelt\ x$ vuol dire che x è una *relazione ternaria*;
$Qrelq\ x$ vuol dire che x è una *relazione quaternaria*;
$Qrun\ x$ vuol dire che x è una *relazione univoca*;
$Qrbiun\ x$ vuol dire che x è una *relazione biunivoca.*

Le sette qualità godono di $Qqual$ e quindi possiamo scrivere:

Assioma 1.1 $Qqual\ Qqual$, $Qqual\ Qrel$, $Qqual\ Qrelb$, $Qqual\ Qrelt$, $Qqual\ Qrelq$, $Qqual\ Qrun$, $Qqual\ Qrbiun$.

Le tre qualità $Qrelb$, $Qrelt$, $Qrelq$ sono particolarizzazioni della qualità più generale $Qrel$, cioè:

Assioma 1.2 *Un elemento x che goda di una delle tre qualità $Qrelb$, $Qrelt$, $Qrelq$ gode anche della qualità $Qrel$.*

Si noti che non escludiamo affatto che vi possano essere relazioni più complesse delle relazioni binarie, ternarie o quaternarie : semplicemente non le introduciamo in questo capitolo in quanto non dovremo farne uso in questo articolo.

Dopo l'idea primitiva di godere di una certa qualità, la seconda più importante idea primitiva di questo capitolo è quella di "*essere in una certa relazione.*" Precisamente, dati due oggetti x, y di qualsiasi natura e una relazione binaria r, scriveremo

$$r\ x, y$$

oppure talvolta

$$r\ x; y$$

per dire che "x ed y sono nella relazione r". Talvolta invece di dire che x ed y sono nella relazione r diremo anche che x è nella relazione r con y.

Analogamente se x, y, z sono oggetti di qualsiasi natura e ρ è una relazione ternaria, scriveremo

$$\rho\ x, y, z$$

oppure

$$\rho\ x; y; z$$

per dire che "x, y, z sono nella relazione ρ".

Infine se τ è una relazione quaternaria ed x, y, z, t sono oggetti di natura qualsiasi, scriveremo

$$\tau\ x, y, z, t$$

oppure

$$\tau\ x; y; z; t$$

per dire che "x, y, z, t sono nella relazione τ".

Passando alle relazioni, in questo capitolo introduciamo quattro relazioni fondamentali: *Rqual*, *Rrelb*, *Rrelt*, *Rid*. La relazione *Rqual* è una relazione binaria e collega le *qualità* con gli *elementi che ne godono.* Precisamente:

Assioma 1.3 *Rqual è una relazione binaria. Dati gli oggetti x, y, se si ha*

$$Rqual\ x, y$$

allora x è una qualità (cioè gode di Qqual). Inoltre se q è una qualità mentre x è un qualsiasi oggetto, allora si ha Rqual q, x se e solo se $q\ x$ (cioè x gode della qualità q).

La relazione *Rrelb* è una relazione ternaria e collega le *relazioni binarie* con gli *oggetti che sono in tali relazioni.* In altri termini:

Assioma 1.4 *Rrelb è una relazione ternaria. Dati gli oggetti x, y, z, se si ha*

$$Rrelb\ x, y, z$$

allora x è una relazione binaria (cioè gode di Qrelb). Inoltre se r è una relazione binaria, mentre x, y sono oggetti di qualsiasi natura, allora si ha Rrelb r, x, y se e solo se $r\ x, y$ (cioè x, y sono nella relazione r).

La relazione *Rrelt* è una relazione quaternaria e collega *relazioni ternarie* con gli *oggetti che sono in tali relazioni.* In altri termini:

Assioma 1.5 *Rrelt è una relazione quaternaria. Dati gli oggetti x, y, z, t, se si ha*

$$Rrelt\ x, y, z, t$$

allora x è una relazione ternaria (cioè gode di Qrelt). Inoltre se ρ è una relazione ternaria mentre x, y, z sono oggetti di qualsiasi natura, allora si ha Rrelt ρ, x, y, z se e solo se $\rho\ x, y, z$ (cioè x, y, z sono nella relazione ρ).

Infine *Rid* è una relazione binaria e rappresenta l'*identità.* In altri termini:

Assioma 1.6 *Rid è una relazione biunivoca. Affinché sia*

$$Rid\ x, y$$

occorre e basta che x ed y siano esattamente lo stesso oggetto. In altri termini ogni oggetto è nella relazione Rid con se stesso e soltanto con se stesso.

La relazione *Rid* esprime l'identità fra oggetti di *qualsiasi specie* e quindi scriveremo in genere $x = y$ in luogo di *Rid* x, y.

La relazione *Rid* è l'esempio più semplice di relazione che gode delle due qualità *Qrun* e *Qrbiun.* Per quanto riguarda la qualità *Qrun* poniamo il seguente assioma, che esprime l'idea di *univocità* applicata a *relazioni binarie, ternarie* e *quaternarie*:

Assioma 1.7 *Qrun è una qualità.*
1) se Qrun x allora Qrel x;
2) se Qrelb r;   Qrun r; $r\ x, y$; $r\ x, z$ allora $y = z$;

3) se Qrelt ρ; *Qrun* ρ; $\rho\ x, y, z$; $\rho\ x, y, t$ *allora* $z = t$*;*
4) se Qrelq τ; *Qrun* τ; $\tau\ x, y, z, t$; $\tau\ x, y, z, u$ *allora* $t = u$*.*

Infine *Qrbiun* è la qualità di essere una *relazione binaria biunivoca* e la biunivocità è espressa dall'assioma:

Assioma 1.8 *Qrbiun è una qualità.*
1) se Qrbiun x *allora Qrelb* x*, Qrun* x*;*
2) se Qrbiun x; $r\ y, x$; $r\ z, x$ *allora* $y = z$*.*

Capitolo 2: Operazioni, collezioni, insiemi e numeri naturali

In questo capitolo diamo alcuni semplicissimi esempi di "innesto " di concetti matematici sul "tronco" degli assiomi fondamentali riguardanti qualità e relazioni. Ciascuno di questi innesti deve naturalmente essere considerato solo un primo "germoglio" a partire dal quale si possono sviluppare in vari modi interi rami della Matematica. In questo capitolo introdurremo i concetti di operazione, collezione, insieme e numero naturale, dando soltanto alcuni assiomi descrittivi fondamentali, in modo da non pregiudicare la possibilità di sviluppare in differenti direzioni le rispettive teorie.

Introduciamo anzitutto il concetto di *operazione* mediante le tre qualità *Qop*, qualità di essere un'operazione, *Qops*, qualità di essere un'*operazione semplice*, *Qopb*, qualità di essere un'*operazione binaria*, e le relazioni *Rops* e *Ropb* che descrivono il modo di operare delle operazioni semplici e binarie. Esse soddisfano i seguenti assiomi:

Assioma 2.1 *Qops, Qopb e Qop sono qualità. Rops è una relazione ternaria univoca e Ropb è una relazione quaternaria univoca.*
1) Se Qops x *oppure Qopb* x *allora Qop* x*. (In altri termini Qops e Qopb sono particolarizzazioni della qualità generale Qop.)*
2) per ogni scelta di x, y, z*, se Rops* x, y, z *allora Qops* x*;*
3) se Ropb x, y, z, t *allora Qopb* x*.*

Quando f è un'operazione semplice, invece di scrivere *Rops* f, x, y scriveremo spesso $y = f\ x$ e diremo che f *trasforma* x in y, oppure diremo che f *manda* x in y, oppure f *agisce* su x dando il *risultato* y. Analogamente, quando φ è un'operazione binaria, invece di scrivere *Ropb* φ, x, y, z scriveremo spesso $z = \varphi\ x, y$. Notiamo che l'*univocità* delle relazioni *Rops* e *Ropb* fornisce direttamente la "univocità" delle operazioni semplici e binarie, cioè il fatto che se f è un'operazione semplice e agisce su un oggetto x, il risultato $y = f\ x$ è univocamente determinato. Analogamente se φ è un'operazione binaria e agisce sugli oggetti x, y, il risultato $z = \varphi\ x, y$ è univocamente determinato.

Dopo le operazioni vogliamo innestare un'altra specie di oggetti spesso considerati in matematica, cioè le *collezioni* e soprattutto gli *insiemi* che sono particolari collezioni largamente usate in tutta la Matematica moderna. A tale scopo introduciamo la qualità *Qcoll*, cioè la qualità di essere una *collezione*, la relazione *Rcoll*, relazione di *appartenenza a collezioni*, la qualità *Qins* di essere un *insieme* e la relazione *Rins* di *appartenenza a insiemi*. Esse soddisfano gli assiomi seguenti:

Assioma 2.2 *Qcoll e Qins sono qualità. Rcoll e Rins sono relazioni binarie.*
1) Qins x implica Qcoll x;
2) se Rcoll x, y allora x è una collezione, cioè Qcoll x;
3) Rins x, y se e solo se Qins x, Rcoll x, y.

Seguendo l'uso, invece di scrivere *Rcoll* x, y scriveremo $y \in x$ e diremo che y *appartiene* a x oppure che y è un *elemento* di x. Il punto 3 ci dice in sostanza che *Rins* è la restrizione di *Rcoll* agli insiemi.

Introdurremo anche la relazione *Rincl*, relazione di *inclusione*, che soddisfa l'assioma:

Assioma 2.3 *Rincl è una relazione binaria.*
1) Se A, B sono collezioni allora Rincl A, B se e solo se ogni elemento di A è anche elemento di B;
2) se QinsE, Qcoll X, Rincl X, E, allora Qins X.

Secondo l'uso, quando A, B sono collezioni e si ha *Rincl* A, B scriveremo $A \subseteq B$ e diremo che A è *contenuto* in B oppure che A è *parte* di B. Il punto 2) ci dice che se una collezione è contenuta in un insieme, allora è essa stessa un insieme.

Possiamo ora enunciare l'assioma fondamentale della teoria delle collezioni, l'*assioma di estensionalità*:

Assioma 2.4 *Se A, B sono collezioni, $A \subseteq B, B \subseteq A$, allora $A = B$.*

Per dare qualche primo esempio di collezioni e di insiemi introduciamo ora la *collezione universale* V, l'operazione binaria *Compl* (*complemento relativo*) e l'operazione semplice *Csing* (generatrice di *collezioni singolari* o *singoletti*).

Assioma 2.5 *V è una collezione, Csing è un'operazione semplice, Compl è un'operazione binaria.*
1) Per ogni oggetto x si ha $x \in V$.
2) Per ogni oggetto x esite Csing x ed è un insieme il cui unico elemento è x.
3) Se A, B sono collezioni esiste Compl A, B ed è una collezione cui appartengono tutti e soli gli elementi di A che non sono elementi di B.

Indicheremo l'insieme *Csing* x con $\{x\}$ e lo chiameremo il *singoletto* di x e indicheremo la collezione *Compl* A, B con $A \setminus B$ e la chiameremo *complemento relativo* di B rispetto ad A, oppure *differenza* fra A e B.

Notiamo che dagli assiomi segue l'esistenza della *collezione vuota* $\emptyset$, che è un insieme, dell'*intersezione* tra due collezioni $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ e dell'*unione* di due collezioni $A \cup B = V \setminus ((V \setminus A) \cap (V \setminus B))$. Per costruire insiemi a partire dai singoletti postuliamo anche:

Assioma 2.6 *Se A, B sono insiemi anche $A \cup B$ è un insieme.*

Partendo dai singoletti otteniamo quindi, dati gli oggetti x, y, z, t, ecc. anche il *duetto* $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$, il *terzetto* $\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\}$, il *quartetto* $\{x, y, z, t\} = \{x, y, z\} \cup \{t\}$, ecc.

Come preannunciato, abbiamo dato soltanto i primi assiomi "descrittivi" di operazioni e collezioni, onde lasciare completamente impregiudicato lo sviluppo di tali concetti mediante l'introduzione di assiomi che specificano altri modi di "costruire" collezioni, insiemi e operazioni (vedi ad esempio [15,17,18]).

Notiamo che non abbiamo assolutamente introdotto un assioma di estensionalità per operazioni: infatti nel concetto di operazione vogliamo inglobare le idee di "costruzione", "fabbricazione", "procedura di calcolo", sia pure dando all'idea di operazione una estensione molto ampia e in molti casi, come quelli citati nell'assioma 2.5, poco "concreta"; quindi non vogliamo escludere la possibilità che due operazioni restino *differenti* pur agendo sugli *stessi oggetti* e dando sempre gli *stessi risultati* (vedi [19]).

Concludiamo questo capitolo introducendo i numeri naturali, cioè i numeri 0, 1, 2, 3, 4, . . ., mediante la qualità *Qnnat*, di essere un *numero naturale* e la relazione biunivoca *Rnsuc*, che collega ciascun numero naturale col suo *successore immediato* . Esse sono governate dai seguenti assiomi:

Assioma 2.7 *Qnnat è una qualità e Rnsuc è una relazione biunivoca.*
1) Rnsuc x, y *implica Qnnat* x*, Qnnat* y*.*
2) Esiste un unico z *tale che Qnnat* z *mentre per nessun* x *si ha Rnsuc* x, z*.*
3) Se Qnnat x*, allora esiste un* y *tale che Rnsuc* x, y*.*

Dato un numero naturale x, l'unico numero naturale y tale che *Rnsuc* x, y sarà chiamato *successore* di x. Gli assiomi 2.7 sono sufficienti a individuare i numeri naturali 0 (l'unico z di cui al punto 2), 1 (il successore di 0), 2 (il successore di 1), ecc.

La teoria aritmetica delineata dall'assioma 2.7 è molto debole, ma comporta comunque la possibilità di individuare mediante la relazione *Rnsuc infiniti* numeri naturali. Se basta disporre solo di pochi numeri naturali, ad esempio i numeri $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, si può sostituire al punto 3 dell'assioma 2.7 alcuni suoi casi particolari, per esempio gli assiomi:

2.7.3.1) Esiste il numero naturale 1 *tale che Rnsuc* $0; 1$*;*
2.7.3.2) Esiste il numero naturale 2 *tale che Rnsuc* $1; 2$*;*
2.7.3.3) Esiste il numero naturale 3 *tale che Rnsuc* $2; 3$*;*
2.7.3.4) Esiste il numero naturale 4 *tale che Rnsuc* $3; 4$*;*
2.7.3.5) Esiste il numero naturale 5 *tale che Rnsuc* $4; 5$*;*
2.7.3.6) Esiste il numero naturale 6 *tale che Rnsuc* $5; 6$*;*
2.7.3.7) Esiste il numero naturale 7 *tale che Rnsuc* $6; 7$*.*

Lo sviluppo di varie teorie forti dell'Aritmetica (standard e non standard) dipenderà dall'introduzione di operazioni (cominciando dalle quattro operazioni delle scuole elementari), relazioni (l'ordinamento naturale, la divisibilità, ecc.), collezioni (la collezione **N** di tutti i numeri naturali, la collezione **P** di tutti i primi, ecc.) e di varie forme del principio d'induzione, ecc.

Capitolo 3: Correlazioni, funzioni e sistemi

In questo capitolo considereremo un'altra specie di oggetti fondamentali della Matematica, le correlazioni, insieme alle sue particolarizzazioni correlazioni funzionali, sistemi e funzioni.

Spesso, nelle trattazioni usuali, sistemi e funzioni vengono identificati con i loro grafici, costruiti mediante le cosiddette "coppie di Kuratowski", cioè gli insiemi del tipo $\{\{x\},\{x,y\}\}$. Noi preferiamo trattare invece le correlazioni come una specie di oggetti ben distinta dalla specie delle collezioni, lasciando aperta la strada a varie teorie riguardanti le relazioni tra collezioni e correlazioni: per un primo esempio di tali teorie vedi [18]. In questo capitolo ci limitiamo a constatare certe rassomiglianze tra teoria delle collezioni e teoria delle correlazioni e in particolare la possibilità di estendere alle correlazioni alcuni assiomi riguardanti la relazione *Rincl* e l'operazione *Compl* già considerate nel capitolo 2.

Notiamo anche che il concetto di operazione è ben distinto da quelli di correlazione funzionale e di funzione, pure caratterizzati come le operazioni da assiomi di univocità: le operazioni non soddisfano un assioma di estensionalità, corrispondendo, da un punto di vista intuitivo, all'idea di fabbricazione, di calcolo, di costruzione, essenzialmente non estensionali. L'idea di correlazione è invece ispirata ad una semplice "ispezione di tabelle input-output": si muove nello spirito delle operazioni, in un certo senso, l'ingegnere che deve organizzare il lavoro di una fabbrica; si muove invece nello spirito delle correlazioni un controllore di magazzino che registra semplicemente materiali che entrano e prodotti che escono.

Un primo passo nell'innesto delle correlazioni è l'introduzione della qualità *Qcorr* di essere una *correlazione* e della relazione *Rcorr* che descrive l'azione delle correlazioni; ad esse imponiamo l'assioma:

Assioma 3.1 *Qcorr è una qualità. Rcorr è una relazione ternaria. Se Rcorr* x, y, z *allora Qcorr* x.

Data una correlazione C, invece di scrivere *Rcorr* C, x, y diremo talvolta che x è un *indice* di C, che y è un *valore* di C, e che l'indice x e il valore y sono *correlati* da C.

Dopo l'innesto delle correlazioni si può passare a quello di correlazioni funzionali, sistemi, funzioni introducendo la qualità $Qcorfun$, di essere una *correlazione funzionale*, la qualità *Qsys* di essere un *sistema* e la qualità $Qfun$ di essere una *funzione*: esse soddisfano l'assioma:

Assioma 3.2 *Qcorfun, Qsys e Qfun sono qualità.*
1) Se $Qcorfun$ x *oppure Qsys* x *allora Qcorr* x.
2) $Qfun$ x *se e solo se* x *gode simultaneamente di Qsys e di* $Qcorfun$.

Introduciamo pure le relazioni $Rcorfun$, *Rsys*, $Rfun$ restrizioni di *Rcorr* alle correlazioni funzionali, ai sistemi e alle funzioni ; questo fatto è espresso dall'assioma seguente:

Assioma 3.3 *Rcorfun, Rsys, Rfun sono relazioni ternarie.*
1) $Rcorfun$ F, x, y *se e solo se Rcorr* F, x, y*,* $Qcorfun$ F.
2) Rsys S, x, y *se e solo se Rcorr* S, x, y*, Qsys* S .
3) $Rfun$ f, x, y *se e solo se Rcorr* f, x, y*,* $Qfun$ f .

Possiamo dare ora l'assioma di *univocità* delle correlazioni funzionali e delle funzioni:

Assioma 3.4 *Rcorfun e Rfun sono relazioni ternarie univoche.*
Sia F una correlazione: si ha $Qcorfun\ F$ (cioè F è una correlazione funzionale) se e solo se per ogni x, y, z verificanti simultaneamente le condizioni Rcorr F, x, y e Rcorr F, x, z risulta $y = z$.

La relazione di inclusione *Rincl* che già abbiamo introdotto nel capitolo 2, oltre che interessare le collezioni interessa anche altri oggetti come le correlazioni, per le quali diamo un assioma analogo all'assioma 2.3:

Assioma 3.5 *Siano F, G correlazioni: si ha Rincl F, G se e solo se per ogni x, y, Rcorr F, x, y implica Rcorr G, x, y (in altri termini si ha Rincl F, G se indici e valori correlati da F sono anche correlati da G). Inoltre, se s è un sistema, t è una correlazione e si ha Rincl t, s, allora anche t è un sistema.*

Anche nel caso delle correlazioni useremo notazioni simili a quele usate per le collezioni, e cioè $F \subseteq G$ oppure $G \supseteq F$ in luogo di *Rincl* F, G e diremo che la correlazione G contiene la correlazione F oppure che F è parte della correlazione G. Diamo l'*assioma di estensionalità* per le correlazioni nel modo seguente:

Assioma 3.6 *Se F e G sono correlazioni e si ha $F \subseteq G, G \subseteq F$ allora $F = G$.*

Introduciamo ora le relazioni *Rdom* che collega una correlazione con i suoi *indici* (detti anche talvolta "elementi del suo dominio") e la relazione *Rcod* che collega una correlazione ai suoi *valori* (detti anche talvolta "elementi del suo codominio").

Assioma 3.7 *Rdom e Rcod sono relazioni binarie. Se F è una correlazione allora si ha:*
1) Rdom F, x se e solo se esiste un y tale che Rcorr F, x, y;
2) Rcod F, y se e solo se esiste un x tale che Rcorr F, x, y.

In questo articolo non postuliamo che data comunque una correlazione F esista una collezione cui appartengono tutti e soli i suoi indici, né una collezione cui appartengono tutti e soli tutti e soli i suoi valori. Vedremo invece tra poco che le relazioni *Rdom* e *Rcod* interessano anche altre specie di oggetti, come operazioni e relazioni.

Prima però vogliamo stabilire l'esistenza di alcune correlazioni particolarmente significative, e perciò introduciamo la correlazione universale V_2, l'operazione $Fsing$, generatrice di *funzioni singolari*, ed estendiamo alle correlazioni l'operazione $Compl$ precedentemente introdotta. Poniamo gli assiomi:

Assioma 3.8 *1) Fsing è un'operazione binaria. Dati comunque gli oggetti a, b esiste $Fsing\ a, b = f$ ed f è una funzione tale che $Rfun\ f, x, y$ se e solo se $x = a$ e $y = b$.*
2) V_2 è una correlazione tale che Rcorr V_2, x, y vale per ogni scelta di x, y.

Assioma 3.9 *Se F, G sono correlazioni esiste Compl $F, G = H$ ed è una correlazione tale che per ogni x, y Rcorr H, x, y se e solo se Rcorr F, x, y ma non Rcorr G, x, y.*

Ispirati alla notazione algebrica delle sostituzioni, indicheremo la funzione singolare $Fsing\ a, b$ mediante $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Estendiamo inoltre alle correlazioni le notazioni delle collezioni: la *differenza* $F \setminus G = Compl\ F, G$; l'*intersezione* $F \cap G = F \setminus (F \setminus G)$; l'*unione* $F \cup G = V_2 \setminus ((V_2 \setminus F) \cap (V_2 \setminus G))$.

Tenendo conto di queste notazioni, per ogni correlazione F sono equivalenti le due condizioni $Rcorr\ F, x, y,\ F \supseteq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Possiamo ora introdurre la relazione $Rgraf$ che collega una correlazione alle *funzioni singolari* in essa contenute (dette anche talvolta "elementi del suo grafico") Precisamente abbiamo l'assioma:

Assioma 3.10 *Rgraf è una relazione binaria.*
1) Se F è una correlazione e risulta $Rgraf\ F, z$ allora z è una funzione singolare;
2) per ogni scelta di x, y, si ha $Rgraf\ F, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se e solo se $F \supseteq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Notiamo che le relazioni $Rdom, Rcod, Rgraf$ riguardano, oltre alle correlazioni, anche le relazioni, per le quali diamo il seguente assioma:

Assioma 3.11 *1) Se r è una relazione binaria e x è un qualsiasi oggetto, si ha $Rdom\ r, x$ se e solo se esiste un y tale che r, x, y; si ha $Rcod\ r, y$ se e solo se esiste un x tale che r, x, y; si ha $Rgraf\ r, w$ se e solo se esistono x, y tali che $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $r\ x, y$.*
2) Se ρ è una relazione ternaria, si ha $Rdom\ \rho, w$ se e solo se esistono x, y tali che $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ed esiste uno z tale che $\rho\ x, y, z$; si ha $Rcod\ \rho, z$ se e solo se esistono x, y tali che $\rho\ x, y, z$; si ha $Rgraf\ \rho, z$ se e solo se esistono a, b, c tali che $z = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ c \end{pmatrix}$, $\rho\ a, b, c$.
3) Se τ è una relazione quaternaria allora $Rdom\ \tau, w$ se e solo se esistono a, b, c tali che $w = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ c \end{pmatrix}$ ed esiste d tale che $\tau\ a, b, c, d$; $Rcod\ \tau, d$ se e solo se esistono a, b, c tali che $\tau\ a, b, c, d$; $Rgraf\ \tau, z$ se e solo se esistono a, b, c, d tali che $z = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ c \end{pmatrix} \\ d \end{pmatrix}$, $\tau\ a, b, c, d$.

Un assioma analogo al precedente potrebbe essere dato anche per le operazioni semplici e binarie. Osserviamo che la relazione $Rgraf$ collega relazioni quaternarie e funzioni singolari, introdotte a loro volta con l'intervento di relazioni ternarie e operazioni binarie; si chiude così in sostanza una specie di ciclo tra i capitoli 1,2,3 di questa nota e si realizza un esempio interessante di *autoreferenza* o almeno di *mutua referenza*. Problemi molto più difficili riguardanti autoreferenze possibili e impossibili sorgono dalla riflessione sul prossimo capitolo, in cui si tratteranno proposizioni e predicati.

Concludiamo questo capitolo indicando altre due operazioni interessanti che agiscono sulle correlazioni, l'operazione di inversione e l'operazione di composizione, e dando qualche esempio di interessanti sistemi costruibili a partire dalle funzioni singolari mediante l'unione di correlazioni. Introduciamo le operazioni Inv (inversione) e $Comp$ (composizione) soddisfacenti gli assiomi:

Assioma 3.12 *Inv è un'operazione semplice.*
1) Se F è una correlazione allora $Inv\ F = G$ esiste ed è una correlazione tale che Rcorr G, x, y se e solo se Rcorr F, y, x.
2) Se s è un sistema allora $Inv\ s$ è un sistema.

Assioma 3.13 *Comp è un'operazione binaria.*
1) Se F, G sono correlazioni allora $Comp\ F, G = H$ esiste ed è una correlazione; inoltre si ha Rcorr H, x, y se e solo se esiste z tale che Rcorr G, x, z, Rcorr F, z, y.
2) Se s, t sono sistemi allora $Comp\ s, t$ è un sistema.

Per indicare brevemente le correlazioni inverse e composte adottiamo le notazioni $F^{-1} = Inv\ F$; $F \circ G = Comp\ F, G$.

Gli assiomi fin qui introdotti permettono di costruire "a mano" quei sistemi "finiti" che si vogliano concretamente adoperare. Ad esempio, date due operazioni singolari $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ si ottiene per unione il sistema $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; analogamente data una terza funzionae singolare $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ abbiamo il sistema $\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$ In particolare, per ogni intero n definito in base all'assioma 2.7 oppure agli assiomi 2.7.3.1...2.7.3.7, si possono considerare le n-uple come funzioni definite sui numeri $1, 2, \ldots, n$. In particolare per ogni oggetto a si ha la "1-upla" $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, dati gli oggetti a, b si ha la 2-upla o coppia ordinata $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$, che sarà indicata col simbolo (a, b), dati gli oggetti a, b, c si ha la terna $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, denotata con (a, b, c), e dati gli oggetti a, b, c, d si ha la quaterna $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, denotata con (a, b, c, d), ecc.

Capitolo 4: Proposizioni e predicati

In questo capitolo introduciamo alcune idee molto generali sulle proposizioni e i predicati. Gli assiomi che introdurremo saranno volutamente molto deboli e riguarderanno essenzialmente proposizioni e predicati "classici", allo scopo di lasciare la più ampia libertà ai successivi sviluppi di altre logiche diverse da quella classica e all'approfondimento dei difficili problemi che emergono quando si passa dallo studio di modelli "ristretti", aventi come ambiente un insieme (come usualmente avviene nella teoria dei modelli), a quello di modelli "universali" dei diversi tipi di logica, aventi come ambiente la collezione universale V.

Cominciamo perciò introducendo la nozione "più generale" di proposizione mediante la qualità *Qgprop*: quindi scriveremo *Qgprop* x per dire che x è una *proposizione*, senza ulteriori precisazioni. Tra le proposizioni vi sono poi in particolare le proposizioni "classiche" che obbediscono alle regole del calcolo proposizionale classico e sono caratterizzate dalla qualità *Qclp*: quindi *Qclp* x vuol dire che x è una *proposizione classica*. Possiamo enunciare l'assioma:

Assioma 4.1 *Qgprop, Qclp sono qualità. Se Qclp p allora Qgprop p.*

Sulle proposizioni agiscono le tradizionali operazioni logiche *Et* (*congiunzione*), Vel (*disgiunzione* o *alternativa*), Non (*negazione*):

Assioma 4.2 *Et e Vel sono operazioni binarie. Non è un'operazione semplice. Se* p, q *sono proposizioni classiche allora esistono Et* p, q*,* $Vel\ p, q$*,* $Non\ p$ *e sono proposizioni classiche.*

Seguendo l'uso corrente denoteremo con $p\&q$, $p\vee q$, $\neg p$ le proposizioni *Et* p, q, $Vel\ p, q$ e $Non\ p$.

Considereremo anche la qualità *Qtver*, di essere vero "in senso assoluto e totale" e quindi scriveremo *Qtver* x per dire che x è *vero* e scriveremo simultaneamente *Qgprop* p, *Qtver* p per dire che p è una *proposizione vera.* Il seguente assioma collega le proposizioni classiche alla qualità *Qtver* esprimendo tra l'altro i classici principi di *non contraddizione* e del *terzo escluso:*

Assioma 4.3 *Qtver è una qualità. Se* p, q *sono proposizioni classiche allora:*
1) p *gode di Qtver se e solo se* $\neg\ p$ *non gode di Qtver.*
2) $p\&q$ *gode di Qtver se e solo se* p *e* q *ne godono entrambe.*
3) $p \vee q$ *gode di Qtver se e solo se almeno una tra* p *e* q *ne gode.*

Quando $\neg p$ gode della qualità *Qtver*, diremo anche che p è *falsa*.

Introduciamo anche le relazioni *Rseq* di *conseguenza logica* tra proposizioni e la relazione *Rleq* di *equivalenza logica* tra proposizioni, per le quali diamo soltanto due assiomi molto generali limitandoci al solito al caso delle proposizioni classiche:

Assioma 4.4 *Siano* p, q, r *proposizioni classiche. Se Rseq* p, q*, Qtver* p *allora Qtver* q*. Si ha inoltre:*
1) Rleq p, q *se e solo se Rseq* p, q*, Rseq* q, p*.*
2) Rseq p, p*.*
3) Se Rseq p, q*, Rseq* q, r *allora Rseq* p, r*.*

Assioma 4.5 *Siano* p, q *proposizioni classiche. Si ha:*
1) Rseq $p\&q, p$ *e Rseq* $p\&q, q\&p$*.*
2) Rseq $p, p \vee q$ *e Rseq* $q \vee p, p \vee q$*.*
3) Rleq $p, \neg\neg p$*.*

Introdotte così le proposizioni, possiamo riprendere il concetto classico di predicato "alla Frege", (vedi [20]) cioè come operazione a valori proposizioni. Sono ovviamente possibili molte e differenti introduzioni (vedi ad esempio [13,15,25]).

Noi qui introduciamo la qualità *Qopreds* di essere un'*operazione predicativa semplice* e la qualità *Qclops*, di essere un'*operazione predicativa classica semplice.* Vale il seguente assioma:

Assioma 4.6 *Qopreds e Qclops sono qualità.*
1) Se Qclops x allora Qopreds x.
2) Se Qopreds x allora Qops x.
3) Se Qopreds x, Rops x, y, z allora Qgprop z.
4) Se Qclops x, Rops x, y, z allora Qclp z.

Il collegamento tra gli oggetti studiati nei capitoli 1,2,3 e le proposizioni che li descrivono è stabilito dall'operazione *Gops*, generatrice di *operazioni predicative semplici.* Essa verifica i seguenti assiomi:

Assioma 4.7 *Gops è un'operazione semplice. Se τ è una relazione quaternaria , allora:*
1) Gops τ è un'operazione semplice;
2) per ogni oggetto x, (Gops τ)x è un'operazione semplice;
3) per ogni x, y, ((Gops τ)x)y è un'operazione semplice;
4) per ogni x, y, z, ((Gops τ)x)y)z è un'operazione predicativa semplice;
5) per ogni x, y, z, t, (((Gops τ)x)y)z)t è una proposizione;
6) per ogni x, y, z, t, la proposizione (((Gops τ)x)y)z)t gode di Qtver se e solo se si ha τ x, y, z, t (cioè se e solo se x, y, z, t sono nella relazione τ).

Il punto 6 dell'assioma precedente giustifica la notazione abbreviata

$$"\tau\ x, y, z, t" = ((((Gops\ \tau)x)y)z)t.$$

Una volta definito il comportamento dell'operazione *Gops* sulle relazioni quaternarie è facile passare alle altre specie di oggetti introdotti nei capitoli 1,2,3 nel modo seguente:

Assioma 4.8 *1) Se ρ è una relazione ternaria allora Gops ρ = (Gops Rrelt)ρ.*

2) Se r è una relazione binaria allora Gops r = (Gops Rrelb)r.
3) Se q è una qualità allora Gops q = (Gops Rqual)q.
4) Se f è un'operazione semplice allora Gops f = (Gops Rops)f.
5) Se φ è un'operazione binaria allora Gops φ = (Gops Ropb)φ.
6) Se C è una collezione allora Gops C = (Gops Rcoll)C.
7) Se F è una correlazione allora Gops F = (Gops Rcorr)F.

Poiché le proposizioni "elementari" generate dai predicati ottenuti mediante l'operazione *Gops* sono asserzioni riguardanti le qualità o le relazioni a cui si è applicato *Gops*, estendiamo la notazione virgolettata nel modo naturale:
se q è una qualità allora "$q\ x$" sta per (*Gops* q)x;
se r è una relazione binaria, allora "$r\ x, y$" sta per ((*Gops* r)x)y;
se ρ è una relazione ternaria, allora "$\rho\ x, y, z$" sta per (((*Gops* ρ)x)y)z);
se C è una collezione allora "$x \in C$" sta per (*Gops* C)x;
infine "$x = y$" sta per ((*Gops Rid*)x)y.

Possiamo ora introdurre il *quantificatore esistenziale* e il *quantificatore universale* mediante le operazioni $Exist$ e $Univ$, regolate dall'assioma:

Assioma 4.9 *Univ ed Exist sono operazioni semplici.*
1) Se p gode di Qclops allora esistono $Univ\ p$ *e* $Exist\ p$ *ed entrambe godono di Qclp.*
2) La proposizione $Univ\ p$ *è vera se e solo se, ogni volta che la proposizione* $p\ x$ *esiste, essa è vera.*
3) La proposizione $Exist\ p$ *è vera se e solo se, per almeno un oggetto* x*, la proposizione* $p\ x$ *esiste ed è vera.*

Utilizzeremo le notazioni più comuni $\forall p$; $\forall x.px$; $\forall y.py$; ecc. in luogo di $Univ\ p$ e analogamente $\exists\ p$; $\exists x.px$; $\exists y.py$; ecc. in luogo di $Exist\ p$: ciò non comporta naturalmente il riferimento a nessun oggetto specifico x, y, ecc.

Dopo aver introdotto operazioni e predicati, e in particolare i predicati "elementari" definiti attraverso *Gops*, si aprono due problemi che potranno essere approfonditi in varie direzioni. Il primo riguarda lo studio di proposizioni e predicati costruibili con varie manipolazioni di operazioni a partire da *Gops* e dalle operazioni logiche $Et, Vel, Non, Exist, Univ$. Soluzioni di problemi simili sono state date in [13,15,25], ma naturalmente sono possibili parecchie soluzioni diverse ed egualmente interessanti. Più difficile è il secondo problema, che ci porta nelle vicinanze di tutte le antinomie e i paradossi: quello di vedere quali proposizioni e predicati costruiti a partire da *Gops* possono essere proposizioni e predicati *classici*. Risultati negativi sostanzialmente ispirati all'antinomia del mentitore o al teorema di Tarski sono stati dimostrati in situazioni analoghe, vedi [13,15]. La ricerca dei più forti assiomi positivi che non portano a contraddizioni è ancora aperta.

Capitolo 5: Osservazioni conclusive

Oltre agli oggetti introdotti nei capitoli 2,3,4 si potrebbero naturalmente considerare, nel quadro degli assiomi più generali su qualità e relazioni, altri oggetti come le *variabili* (vedi [5,11]), le *categorie*, ed eventualmente riprendere la considerazione delle *metaqualità* introdotte in [13] come oggetti di livello intermedio tra gli oggetti "prematematici", qualità e relazioni, e gli oggetti "matematici" come operazioni, numeri, correlazioni e collezioni. Tutte le teorie possono essere sviluppate in molteplici direzioni e per questo ci auguriamo che molti studiosi di varia formazione culturale e di interessi diversi partecipino a tale sviluppo con grande libertà ed autonomia, ma anche con grande disponibilità a un franco confronto d'idee. Probabilmente il capitolo in cui si incontreranno maggiori problemi e maggiori difficoltà, ma anche potranno nascere le idee più nuove e interessanti, è il capitolo riguardante proposizioni e predicati. In questo campo infatti si toccano le più profonde radici comuni della Matematica, della Logica e dell'Informatica e ci si avvicina ai paradossi ed alle antinomie antiche e moderne.

La situazione dello studioso che vuole approfondire questi temi rassomiglia un po' a quella dell'alpinista che avanza, procedendo su creste molto sottili e circondate da profondi precipizi, in direzione di vette molto alte e belle. Ci si muove infatti sul terreno difficile dell'"autoreferenza" e della " mutua referenza" (cfr. [14,24]), che coinvolgono problemi assai insidiosi, dai quali però emergono i significati più profondi delle diverse forme del sapere umano; per comprendere chiaramente questi problemi è necessaria una discussione molto aperta e libera tra studiosi di varie discipline, non limitata a un ristretto gruppo di specialisti. Notiamo che varie forme di autoreferenza (o di mutua referenza) si incontrano non solo in Matematica, Logica e Informatica, ma anche in molti rami del sapere umano. Si può citare il vocabolario che spiega un vocabolo mediante altri vocaboli e contiene anche la voce "vocabolario", le grammatiche scritte seguendo le regole grammaticali, le leggi che regolano l'attività legislativa, le teorie economiche che da una parte descrivono i fenomeni economici, dall'altra, se hanno succeso, possono influenzare profondamente gli stessi operatori pubblici o privati dalla cui azione tali fenomeni dipendono. Altri esempi sono la storia della storiografia, il pittore che ritrae se stesso nell'atto di dipingere, il teatro nel teatro, il romanziere o il poeta che parlano della scrittura di un romanzo o della creazione di una poesia, il biologo che studia le relazioni tra occhi e cervello sulla base di osservazioni fatte con i propri occhi, ecc.

Si potrebbero citare moltissimi altri casi di autoreferenza e mutua referenza e forse le analogie e le differenze tra di essi potrebbero essere argomento di un libero confronto d'idee interdisciplinare. In questo spirito di libero confronto d'idee vanno intese anche le affermazioni che in questo articolo vengono "proposte" (non "imposte") come "assiomi", cioè come affermazioni non dedotte da un sistema di affermazioni precedenti, ma scelte come possibile punto di partenza per gli ulteriori sviluppi di varie teorie. Esse non sono nemmeno "dedotte" dalla Storia della Matematica, dalla Filosofia della Scienza, dalla Logica, ecc., ed anzi possono essere meglio comprese da chi si pone nell'atteggiamento più "ingenuo" possibile e si riferisce ai significati più comuni che il linguaggio di ogni giorno dà alle parole qualità e relazione. Solo dopo una prima lettura di questo lavoro è conveniente la sua rilettura critica, ove ciascuno può naturalmente portare le proprie esperienze e conoscenze di Matematica, Logica, Informatica, Storia, Filosofia, Fisica, Economia, ecc.: tali esperienze potranno essere molto importanti per formulare valutazioni critiche più profonde e meglio motivate e sperabilmente per proporre "assiomi" aggiuntivi o sostitutivi che meglio esprimano e chiarifichino i concetti intuitivi coinvolti.

Non ci attendiamo né desideriamo un'approvazione incondizionata delle nostre proposte: crediamo che sia ancora necessario un ampio lavoro di riflessione critica e di discussione amichevole tra studiosi di varia formazione e di vario orientamento, per arrivare a un buon sistema di assiomi (o ad alcuni buoni sistemi di assiomi) che possano rappresentare un reale significativo progresso rispetto all'attuale situazione. D'altra parte riteniamo che valga la pena di perseguire questo obiettivo, in quanto né il formalismo, né il riduzionismo insiemistico, come ogni altra forma di riduzionismo, sembrano offrire una prospettiva adeguata per una vera comprensione dei molti problemi che la cultura del nostro tempo deve affrontare.

Ogni ricerca sugli assiomi fondamentali di Matematica, Logica e Informatica, come pure delle diverse scienze sperimentali, umanistiche, filosofiche comporta fra l'altro il superamento di una visione troppo chiusa delle diverse specializzazioni ed un'idea più ampia del rigore matematico o scientifico. Il rigore matematico non è solo accuratezza nelle dimostrazioni, ma anche impegno a esporre nel modo più chiaro e comprensibile i problemi che si vorrebbero risolvere, i teoremi che si vorrebbero dimostrare, le congetture che si vorrebbero verificare o confutare. Noi riteniamo che il rigore scientifico consista soprattutto nell'esporre chiaramente e liberamente le proprie certezze e i propri dubbi, i problemi che si ritiene di aver risolto e quelli che si vorrebbe risolvere o vedere risolti, evitando solo quei discorsi confusi, oscuri, inutilmente complicati che finiscono con l'annoiare anche l'ascoltatore meglio disposto.

In ultima analisi dobbiamo concludere che ogni discorso sul metodo scientifico, sul rigore scientifico e sul significato della Scienza ci riporta alla fine alle più antiche intuizioni sui valori sapienziali dell'umiltà, della "convivialità" (che è insieme condivisione del sapere, amicizia, ricerca di reciproca comprensione) e della fiducia nella Sapienza, che viene incontro a coloro che la amano e la cercano.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. P. BARENDREGT – *The Lambda-Calculus*, Amsterdam 1981.

[2] Y. BAR HILLEL, A. A. FRAENKEL, A. LEVY – *Foundations of set theory*, Amsterdam 1973.

[3] L.E. J. BROUWER, *Wiskunde, waarheid, werkelijkheid*, Groningen 1919.

[4] A. CHURCH – *Set theory with a universal set*, in Proceedings of the Tarski Symposium (L. Henkin et al., eds.), Proc. of Symp. P. Math. XXV, Rhode Island 1974, pp. 297-308.

[5] M. CLAVELLI – *Variabili e teoria A*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, (2) 59 (1985), pp. 125-130.

[6] M. CLAVELLI, E. DE GIORGI, M. FORTI, V. M. TORTORELLI – *A selfreference oriented theory for the Foundations of Mathematics*, in "Analyse Mathématique et applications – Contributions en l'honneur de Jacques-Louis Lions", Parigi 1988, pp. 67-115.

[7] E. DE GIORGI – Contributo alla sessione *"Fundamental Principles of Mathematics"*, Plenary Session of the Pontifical Academy of Sciences (25-29 October 1994), 1994.

[8] E. DE GIORGI – *Riflessioni sui Fondamenti della Matematica*, Conferenza per il centenario della società "Mathesis", Roma, 23 ottobre 1995, dattiloscritto.

[9] E. DE GIORGI, M.FORTI – *Una teoria quadro per i fondamenti della Matematica*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 79 (1985), 55-67.

[10] E. DE GIORGI, M. FORTI – *"5×7": A Basic Theory for the Foundations of Mathematics*, Preprint di Matematica n. 74, Scuola Normale Superiore, Pisa 1990.

[11] E. DE GIORGI, M. FORTI, G. LENZI – *Introduzione delle variabili nel quadro delle teorie base dei Fondamenti della Matematica*, Rend. Mat. Acc. Lincei, (9), 5, pp. 117- 128, 1994.

[12] E. DE GIORGI, M. FORTI, G. LENZI – *Una proposta di teorie base dei Fondamenti della Matematica*, Rend. Mat. Acc. Lincei, (9) v.5, pp. 11- 22, 1994.

[13] E. DE GIORGI, M. FORTI, G. LENZI, V. M. TORTORELLI – *Calcolo dei predicati e concetti metateorici in una teoria base dei Fondamenti della Matematica*, Rend. Mat. Acc. Lincei, (9), 6, 1995, pp.79-92.

[14] E. DE GIORGI, M. FORTI, V. M. TORTORELLI – *Sul problema dell'autoriferimento*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 80 (1986).

[15] E. DE GIORGI, G. LENZI – *La teoria '95. Una proposta di teoria aperta e non riduzionistica dei fondamenti della Matematica*, apparirà sugli Atti dell'Accademia dei XL, 1995.

[16] E. DE GIORGI, A. PRETI – *Anche la scienza ha bisogno di sognare*, Quotidiano di Lecce, 6 Gennaio 1996.

[17] M. FORTI, F. HONSELL – *Models of self-descriptive set theories*, in Partial Differential Equations and the Calculus of Variations – Essays in Honor of Ennio De Giorgi (F. Colombini et al., eds), Boston 1989, pp. 473-518.

[18] M. FORTI, F. HONSELL – *Sets and classes within the basic theories for the Foundations of Mathematics*, in "Proceedings of the International Conference on Logic and Algebra in Memory of Roberto Magari" (F. Montagna and A. Ursini, eds.) 1995, in corso di pubblicazione.

[19] M. FORTI, F. HONSELL, M. LENISA – *An axiomatization of partial n-place operations*, Quaderni dell'Istituto di Matematiche Applicate "U. Dini", Facoltà di Ingegneria, Università di Pisa, 1995\4.

[20] G. FREGE – *Grundgesetze der Aritmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. 1 Jena 1893, vol. 2 Pohle, Jena 1903 (ristampato Olms, Hildesheim 1962).

[21] M. GRASSI, G. LENZI, V. M. TORTORELLI – *A formalization of a basic theory for the foundations of Mathematics*, preprint del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, n. 1.98.804, 1994.

[22] A. HEYTING, *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie.* Berlino, 1934.

[23] D. HILBERT, *Über das Unendliche*, Math. Annalen 88 (1923), pp. 151-165.

[24] G. LENZI – *Estensioni contraddittorie della teoria Ampia*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. fis. mat. nat., (8) 83 (1989), pp. 13-28.

[25] G. LENZI, V. M. TORTORELLI – *Introducing predicates into a basic theory for the foundations of Mathematics*, Scuola Normale Superiore, preprint di Matematica n. 51, 1989.

[26] W. V. O. QUINE – *New foundations for mathematical logic*, Amer. Math. Monthly 44 (1973), pp. 70-80.

[27] B. RUSSELL, A. N. WHITEHEAD – *Principia Mathematica*, Cambridge 1925.

[28] M. SCHMIDT – *Hommes de science*, Hermann, 1990.

[29] D. SCOTT – *Combinators and classes*, in λ-Calculus and Computer Science Theory (C. Böhm, ed.), Lecture Notes in Computer Science 37, Berlino 1975.

[30] J. VON NEUMANN – *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, J. f. reine und angew. Math. 154 (1925), pp. 219-240.

E. De Giorgi, G. Lenzi
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri 7
I-56100 PISA (Italy)
email: lenzi@sabsns.sns.it

M. Forti
Dipart. Matem. Applicata "U. Dini"
Via Bonanno 25 B

I-56100 PISA (Italy)
email: forti@dm.unipi.it