VERITÀ E GIUDIZI IN UNA NUOVA PROSPETTIVA ASSIOMATICA

Ennio De Giorgi, Marco Forti, Giacomo Lenzi

Abbiamo accettato con piacere la proposta di scrivere un articolo per la rivista "Con-tratto" perché crediamo che il confronto d'idee tra studiosi di diverse discipline e in particolare tra matematici, logici e informatici da una parte, filosofi e teologi dall'altra possa essere fonte d'ispirazione per gli uni e per gli altri. In particolare ci sembra che una riflessione sulle idee principali della Matematica, della Logica, dell'Informatica, sul significato stesso di queste discipline potrebbe essere per tutti occasione di reale arricchimento culturale.

Il primo contributo che noi possiamo dare a questo confronto d'idee è esporre quelli che, in [11] e [15], abbiamo chiamato i nostri "sogni" nella forma più chiara e meno ambigua che conosciamo, cioè la forma assiomatica, avvertendo che quando enunciamo degli assiomi non intendiamo imporli ai nostri interlocutori ma piuttosto proporli alla loro riflessione e alla loro critica. Non pretendiamo infatti di elaborare da soli quelle che saranno le teorie assiomatiche del terzo millennio, ma pensiamo che un ampio confronto di idee su questo tema, aperto a studiosi di ogni ramo del sapere, sia la via migliore per arrivare a una buona impostazione sia della Matematica, della Logica e dell'Informatica, sia di tutte le altre discipline scientifiche ed umanistiche.

Abbiamo parlato di sogni pensando alle parole dell'Amleto di Shakespeare "vi sono più cose in cielo e in terra di quante ne sogni la tua filosofia", che abbiamo scelto come principio fondamentale delle nostre riflessioni sulla Matematica, la Logica e l'Informatica e che potrebbero ispirare ogni studioso di discipline scientifiche ed umanistiche.

Non ignoriamo le difficoltà incontrate da grandi matematici come Hilbert e Brouwer nelle loro ricerche di una "filosofia" soddisfacente in cui collocare gli oggetti usualmente considerati dai matematici (vedi [3,21,22]), ma pensiamo che non convenga dichiarare un oggetto inesistente per il solo fatto che non si è trovata una "filosofia" soddisfacente in cui collocarlo. Non accettiamo quindi gli inviti "formalisti" o "neopositivisti" a "sognare di meno", a non attribuire per esempio un significato troppo "realistico" ai più bei teoremi riguardanti gli spazi ad infinite dimensioni di Hilbert e di Banach: noi ricordiamo sempre le parole di Shakespeare e quindi pensiamo che lo scienziato che vuole comprendere qualcosa delle realtà esistenti fra cielo e terra debba "sognare di più" e non sognare di meno (vedi [15]). Pensiamo che i maggiori progressi della scienza siano il frutto di alcuni "sogni meravigliosi": i numeri complessi, il calcolo infinitesimale, la meccanica di Newton, la relatività generale, la meccanica quantistica, ecc.; pensiamo pure che una parte significativa del lavoro dei fisici sperimentali consiste nella ricerca di qualche traccia visibile di alcuni oggetti "sognati" dai fisici teorici.

Noi apprezziamo un'elegante soluzione esplicita di un bel problema matematico, un metodo di calcolo semplice e veloce, sappiamo che possono rappresentare un grande progresso rispetto alla semplice dimostrazione di un teorema di esistenza, ma non pensiamo che serva alla ricerca di soluzioni esplicite e metodi di calcolo efficienti la rinuncia a quello che Hilbert ha chiamato il "paradiso di Cantor", popolato da insiemi più o meno strani e da infiniti di ogni ordine. Piuttosto vorremmo immaginare il "paradiso di Cantor" ancora più ricco e "colorato" di quanto lo pensasse Cantor, popolato da oggetti delle più varie specie: insiemi, collezioni, operazioni, formule, linguaggi e loro interpretazioni semantiche, variabili, categorie, numeri standard e non standard, algoritmi, informazioni, proposizioni, predicati, logica classica ed altre logiche, ecc. Naturalmente a questa libertà di sognare corrisponde il dovere di tradurre i sogni in assiomi, congetture, teoremi formulati con la massima chiarezza ed il massimo rigore (e quindi in ultima analisi comprensibili e giudicabili criticamente anche da parte di chi non si muove in una prospettiva realistica ma in una rigorosamente formalistica). Il dialogo tra "formalisti", "realisti", "idealisti", "sognatori" su questo tema non solo può svolgersi nella massima amicizia e comprensione ma può per gli uni e per gli altri essere fonte preziosa di idee molto interessanti. Tutti gli assiomi che tra poco enunceremo si prestano a essere discussi criticamente ed eventualmente modificati, arricchiti, migliorati da parte di studiosi vicini a qualsiasi scuola della Filosofia della Scienza. Per questo è importante che un discorso generale riguardante Matematica, Logica, Informatica sia formulato in modo molto più chiaro di un discorso specialistico. Infatti il primo discorso deve essere comprensibile e criticabile da parte di interlocutori molto vari, mentre per il secondo è sufficiente che sia compreso da un ristretto gruppo di specialisti. In particolare un discorso generale sui concetti basilari della Matematica, della Logica e dell'Informatica non deve essere comprensibile solo da parte di un ristretto numero di "specialisti dei Fondamenti" ma deve essere accessibile a tutti gli studiosi di discipline scientifiche e umanistiche che siano animati da quel sentimento che gli antichi chiamarono Filosofia, cioè amore della Sapienza.

Esporremo perciò, nel modo che ci è sembrato più accessibile a studiosi di varia formazione, alcune idee maturate in questi anni circa il superamento del cosiddetto "riduzionismo insiemistico", cioè della tendenza a ridurre tutta la Matematica alle teorie degli insiemi, e l'allargamento degli orizzonti della Matematica, che dovrebbe descrivere un mondo molto più ricco e "colorato" del pur ricco e interessante mondo degli insiemi. I problemi più difficili ma forse più interessanti, anche da un punto di vista filosofico, che abbiamo finora incontrato nascono probabilmente quando si considera il delicato collegamento esistente tra oggetti più "generali" come qualità e relazioni e oggetti più "specifici" della Matematica e della Logica come operazioni, collezioni, correlazioni e proposizioni. Nodo centrale di questi problemi è la considerazione della qualità *Qtver* che è goduta da *tutte* le proposizioni vere. Noi abbiamo trovato molte difficoltà di carattere "tecnico" nella ricerca di buoni assiomi riguardanti *Qtver*; sospettiamo che queste difficoltà siano solo la "faccia che appare ad un matematico" di più profonde difficoltà filosofiche, legate alle antinomie antiche e moderne, ai problemi dell'"autoriferimento" (vedi [13,23]), alle questioni sulla natura degli "enti matematici, logici e informatici", al significato delle parole "esiste", "esistenza", che il matematico forse usa in modo diverso dallo studioso di Filosofia, di Teologia, di Psicologia, ecc. (basti pensare alla distanza che corre tra un teorema di esistenza e un problema esistenziale!). In particolare potrebbe avere significati filosofici interessanti il fatto che tutte le moderne antinomie sembrano "figlie" della classica antinomia del mentitore.

In questo articolo tentiamo di dare una prima risposta a queste difficoltà, considerando alcune qualità "intermedie" tra gli oggetti matematici più tradizionali e le qualità e relazioni più "difficili da maneggiare" come la qualità *Qtver* goduta da tutte le proposizioni vere. Tali qualità "intermedie" saranno chiamate "metaqualità", considerando che i discorsi che le riguardano sono del tipo usualmente detto "metamatematico", ma prima di arrivare alle metaqualità dobbiamo riprendere da [11] alcune idee generali riguardanti qualità e relazioni. Tali idee forniscono una prima base assiomatica su cui riteniamo possibile "innestare" in modo naturale i concetti fondamentali di molte discipline scientifiche e umanistiche, in particolare gli argomenti di questo articolo. La scelta di questa base è stata suggerita da varie riflessioni sui concetti fondamentali della Matematica, della Logica e dell'Informatica (vedi ad esempio [1,3,4,23,28,29,31]) e da molte conversazioni con studiosi di diverse discipline (Matematica, Fisica, Logica, Informatica, Biologia, Storia, Filosofia, Economia, Teologia, ecc.) che hanno fatto emergere l'opportunità di superare ogni forma di "riduzionismo", cercando invece di inserire le teorie matematiche e possibilmente anche altre teorie scientifiche in un quadro più ampio, in cui sia possibile un confronto critico delle idee fondamentali delle diverse discipline. Per esempio, le teorie proposte da Cantor, Russell e Whitehead, Zermelo, Church, Curry, Gödel e Bernays, Von Neumann e altri grandi matematici di questo secolo (vedi [2], [4], [28]) restano tra le espressioni più elevate dello spirito umano dell'era moderna (paragonabili per esempio alla meccanica di Newton, alla relatività generale, alla meccanica quantistica, al Mosè di Michelangelo, alle musiche di Bach, Mozart, Rossini, al teatro di Shakespeare, alla Dichiarazione Universale dei Diritti Umani del 10-12-1948, ecc.), tuttavia per comprendere meglio le principali idee della Matematica, della Logica e dell'Informatica sembra opportuno inserirle in un quadro più generale dominato dalle due idee di *qualità* e *relazione*. Infatti queste discipline, come del resto le discipline fisiche, chimiche, biologiche, economiche, linguistiche, ecc., considerano *oggetti qualitativamente diversi* e studiano *relazioni tra tali oggetti*. Perciò abbiamo proposto in [11], come premessa generale alla trattazione assiomatica di Matematica, Logica, Informatica e al confronto con altre discipline scientifiche e umanistiche, un semplice sistema di poche *qualità* e *relazioni* fondamentali che dovrebbero costituire la base solida e flessibile su cui inserire qualità e relazioni più specifiche di varie scienze. Tale premessa viene riportata nel Capitolo 1 di questo lavoro, che abbiamo cercato di scrivere in uno stile accessibile a studiosi di varia formazione e nello stesso tempo abbastanza preciso ed ordinato per evitare equivoci ed ambiguità.

Capitolo 1: Qualità e relazioni fondamentali

Tratteremo in questo capitolo le prime idee fondamentali riguardanti qualità e relazioni intese come concetti primitivi. Notiamo che con questa accezione di concetto primitivo non intendiamo rispondere né al problema psicologico di quali siano le idee che per prime si presentano alla mente del bambino, né il problema storico di quali siano state le idee che per prime l'umanità ha considerato; intendiamo semplicemente che tali concetti non sono riconducibili (mediante opportune definizioni) ad altri concetti da noi precedentemente introdotti.

Introduciamo dunque come concetti primitivi l'idea di "*qualità*" e l'idea di "*godere di una data qualità*". Conveniamo che dati un oggetto x di qualsiasi natura ed una qualità q, quando scriveremo

$$q\ x$$

intenderemo dire che "x gode della qualità q".

In questo capitolo introduciamo sette qualità fondamentali i cui significati sono:

$Qqual\ x$ vuol dire che x è una *qualità*;
$Qrel\ x$ vuol dire che x è una *relazione*;

$Qrelb\ x$ vuol dire che x è una *relazione binaria*;
$Qrelt\ x$ vuol dire che x è una *relazione ternaria*;
$Qrelq\ x$ vuol dire che x è una *relazione quaternaria*;
$Qrun\ x$ vuol dire che x è una *relazione univoca*;
$Qrbiun\ x$ vuol dire che x è una *relazione biunivoca*;

introduciamo inoltre quattro relazioni fondamentali:

$Rqual$, la relazione binaria che collega le *qualità* con gli *oggetti che ne godono*;
$Rrelb$, la relazione ternaria che collega le *relazioni binarie* con gli *oggetti che sono in tali relazioni*;
$Rrelt$, la relazione quaternaria che collega le *relazioni ternarie* con gli *oggetti che sono in tali relazioni*;
Rid, la relazione binaria di *identità*.

Le sette qualità godono di $Qqual$ e quindi possiamo scrivere:

Assioma 1.1 *$Qqual\ Qqual$, $Qqual\ Qrel$, $Qqual\ Qrelb$, $Qqual\ Qrelt$, $Qqual\ Qrelq$, $Qqual\ Qrun$, $Qqual\ Qrbiun$.*

Le tre qualità $Qrelb$, $Qrelt$, $Qrelq$ sono particolarizzazioni della qualità più generale $Qrel$, cioè:

Assioma 1.2 *Un oggetto x che goda di una delle tre qualità $Qrelb$, $Qrelt$, $Qrelq$ gode anche della qualità $Qrel$.*

Si noti che non escludiamo affatto che vi possano essere relazioni più complesse delle relazioni binarie, ternarie o quaternarie: semplicemente non le introduciamo in questo capitolo in quanto non dovremo farne uso in questo articolo.

Dopo l'idea primitiva di godere di una certa qualità, la seconda più importante idea primitiva di questo capitolo è quella di "*essere in una certa relazione*." Precisamente, dati due oggetti x, y di qualsiasi natura e una relazione binaria r, scriveremo

$$r\ x, y$$

oppure talvolta

$$r\ x; y$$

per dire che "x ed y sono nella relazione r". Talvolta invece di dire che x ed y sono nella relazione r diremo anche che "x è nella relazione r con y". Notiamo che l'uso del "punto e virgola" può essere utile quando gli argomenti sono numeri interi: per esempio, se $x = 127$ e $y = 151$ la scrittura $r127; 151$ è più espressiva di $r127, 151$, che richiama la notazione dei numeri decimali.

Analogamente se x, y, z sono oggetti di qualsiasi natura e ρ è una relazione ternaria, scriveremo

$$\rho\ x, y, z$$

oppure

$$\rho\ x; y; z$$

per dire che "x, y, z sono nella relazione ρ".

Infine se τ è una relazione quaternaria ed x, y, z, t sono oggetti di natura qualsiasi, scriveremo

$$\tau \ x, y, z, t$$

oppure

$$\tau \ x; y; z; t$$

per dire che "x, y, z, t sono nella relazione τ".

Passando alle quattro relazioni fondamentali *Rqual*, *Rrelb*, *Rrelt*, *Rid*, poniamo gli assiomi seguenti:

Assioma 1.3 *Rqual è una relazione binaria. Dati gli oggetti x, y, se si ha*

$$Rqual \ x, y$$

allora x è una qualità (cioè gode di Qqual). Inoltre se q è una qualità mentre x è un qualsiasi oggetto, allora si ha Rqual q, x se e solo se q x (cioè x gode della qualità q).

Assioma 1.4 *Rrelb è una relazione ternaria. Dati gli oggetti x, y, z, se si ha*

$$Rrelb \ x, y, z$$

allora x è una relazione binaria (cioè gode di Qrelb). Inoltre se r è una relazione binaria, mentre x, y sono oggetti di qualsiasi natura, allora si ha Rrelb r, x, y se e solo se r x, y (cioè x, y sono nella relazione r).

Assioma 1.5 *Rrelt è una relazione quaternaria. Dati gli oggetti x, y, z, t, se si ha*

$$Rrelt \ x, y, z, t$$

allora x è una relazione ternaria (cioè gode di Qrelt). Inoltre se ρ è una relazione ternaria mentre x, y, z sono oggetti di qualsiasi natura, allora si ha Rrelt ρ, x, y, z se e solo se ρ x, y, z (cioè x, y, z sono nella relazione ρ).

Assioma 1.6 *Rid è una relazione biunivoca. Affinché sia*

$$Rid \ x, y$$

occorre e basta che x ed y siano esattamente lo stesso oggetto. In altri termini ogni oggetto è nella relazione Rid con se stesso e soltanto con se stesso.

La relazione *Rid* esprime l'identità di un oggetto di *qualsiasi specie* con se stesso e quindi spesso scriveremo $x = y$ in luogo di *Rid* x, y.

La relazione *Rid* è l'esempio più semplice di relazione che gode delle due qualità *Qrun* e *Qrbiun*. Per quanto riguarda la qualità *Qrun* poniamo il seguente assioma, che esprime l'idea di *univocità* applicata a *relazioni binarie, ternarie* e *quaternarie*:

Assioma 1.7 *Qrun è una qualità.*
1) se Qrun x allora Qrel x;
2) se Qrelb r; Qrun r; r x, y; r x, z allora $y = z$;
3) se Qrelt ρ; Qrun ρ; ρ x, y, z; ρ x, y, t allora $z = t$;
4) se Qrelq τ; Qrun τ; τ x, y, z, t; τ x, y, z, s allora $t = s$.

Infine *Qrbiun* è la qualità di essere una *relazione biunivoca* e la biunivocità è espressa dall'assioma:

Assioma 1.8 *Qrbiun è una qualità.*
1) se Qrbiun x allora Qrelb x, Qrun x;
2) se Qrbiun r; $r\ y,x$; $r\ z,x$ allora $y = z$.

Capitolo 2: Operazioni e numeri naturali

In questo capitolo diamo alcuni semplicissimi esempi di "innesto" di concetti matematici sul "tronco" degli assiomi fondamentali riguardanti qualità e relazioni. Precisamente introdurremo cinque qualità:

Qop, la qualità di essere un'*operazione*;
Qops, la qualità di essere un'*operazione semplice*;
Qopb, la qualità di essere un'*operazione binaria*;
Qtops la qualità di essere un'*operazione semplice totale*;
Qnnat, la qualità di essere un *numero naturale*;

quattro relazioni:

Rops, la relazione ternaria che descrive l'*azione delle operazioni semplici*;
Ropb, la relazione quaternaria che descrive l'*azione delle operazioni binarie*;
Rnsuc, la relazione binaria che collega un *numero naturale* al suo *successore immediato*;
Rtsc, la relazione ternaria che associa alle coppie di *numeri naturali distinti e diversi da* 0 un'*operazione di scambio* "alla Gödel" sulle *operazioni semplici totali iterate*;

e due operazioni:

Id, l'operazione *identica*;
K, l'operazione *generatrice di operazioni costanti.*

Ciascuno di questi innesti deve naturalmente essere considerato solo un primo "germoglio" a partire dal quale si possono sviluppare in vari modi interi rami della Matematica. In questo capitolo daremo soltanto alcuni assiomi descrittivi fondamentali, in modo da non pregiudicare la possibilità di sviluppare in differenti direzioni le rispettive teorie.

Cominciamo col trattare il concetto di operazione.

Assioma 2.1 *Qops, Qopb, Qop e Qtops sono qualità. Rops è una relazione ternaria univoca e Ropb è una relazione quaternaria univoca.*
1) Se Qops x oppure Qopb x allora Qop x;
2) se Rops x, y, z allora Qops x;
3) se Ropb x, y, z, t allora Qopb x;
4) si ha Qtops x se e solo se Qops x e per ogni y esiste z tale che Rops x, y, z.

Quindi *Qops* e *Qopb* sono particolarizzazioni della qualità generale *Qop*, mentre *Qtops* è una particolarizzazione di *Qops*.

Quando f è un'operazione semplice, invece di scrivere *Rops* f, x, y scriveremo spesso $y = f\ x$ e diremo che f *agisce* su x dando come *risultato* y , oppure che f *trasforma* x in y, oppure che f *manda* x in y, oppure che f *applicata* a x dà il *valore* y. Analogamente, quando φ è un'operazione binaria, invece di scrivere *Ropb* φ, x, y, z scriveremo spesso $z = \varphi\ x, y$. Notiamo che l'*univocità* delle relazioni *Rops* e *Ropb* fornisce direttamente l'"univocità" delle operazioni semplici e binarie, cioè il fatto che se f è un'operazione semplice e agisce su un oggetto x, il risultato $y = f\ x$ è univocamente determinato, e analogamente se φ è un'operazione binaria e agisce sugli oggetti x, y, il risultato $z = \varphi\ x, y$ è univocamente determinato.

Per il momento introduciamo soltanto due operazioni fondamentali particolarmente "semplici", Id, l'operazione *identica* e K, la *generatrice di operazioni costanti*, mediante l'assioma:

Assioma 2.2 *Id e K sono operazioni semplici totali.*
1) $Id\ x = x$ *per ogni oggetto* x*.*
2) Per ogni oggetto x*, il risultato* $K\ x$ *è un'operazione semplice totale e inoltre, per ogni oggetto* y*, si ha* $(K\ x)y = x$*.*

Introduciamo ora la qualità *Qnnat* di essere un *numero naturale* (come 0, 1, 2, 3, 4, ...) e la relazione *Rnsuc* che collega ogni numero naturale al suo *immediato successore*. Esse soddisfano il seguente assioma:

Assioma 2.3 *Qnnat è una qualità, Rnsuc è una relazione biunivoca.*
1) Rnsuc x, y *implica Qnnat* x*, Qnnat* y*.*
2) Esiste un unico z *tale che Qnnat* z *mentre per nessun* x *si ha Rnsuc* x, z*.*
3) Se Qnnat x*, allora esiste un* y *tale che Rnsuc* x, y*.*

Dato un numero naturale x, l'unico numero naturale y tale che *Rnsuc* x, y sarà chiamato *successore* di x. Gli assiomi 2.3 sono sufficienti a individuare, mediante la relazione *Rnsuc*, i numeri naturali 0 (l'unico z di cui al punto 2), 1 (il successore di 0), 2 (il successore di 1), ecc.

La teoria aritmetica delineata dall'assioma 2.3 è molto debole, ma comporta comunque la possibilità di individuare, mediante la relazione *Rnsuc*, *infiniti* numeri naturali. Se basta disporre solo di pochi numeri naturali, ad esempio i numeri $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, si possono sostituire al punto 3 dell'assioma 2.3 alcuni suoi casi particolari, per esempio gli assiomi:

2.3.3.1) Esiste il numero naturale 1 *tale che Rnsuc* $0; 1$*;*
2.3.3.2) Esiste il numero naturale 2 *tale che Rnsuc* $1; 2$*;*
2.3.3.3) Esiste il numero naturale 3 *tale che Rnsuc* $2; 3$*;*
2.3.3.4) Esiste il numero naturale 4 *tale che Rnsuc* $3; 4$*;*
2.3.3.5) Esiste il numero naturale 5 *tale che Rnsuc* $4; 5$*;*
2.3.3.6) Esiste il numero naturale 6 *tale che Rnsuc* $5; 6$*;*
2.3.3.7) Esiste il numero naturale 7 *tale che Rnsuc* $6; 7$*.*

Lo sviluppo di varie teorie più forti dell'Aritmetica (standard e non standard) dipenderà dall'introduzione di operazioni (cominciando dalle quattro operazioni delle scuole elementari), relazioni (l'ordinamento naturale, la divisibilità, ecc.), di varie forme del principio d'induzione, ecc.

In questo lavoro non intendiamo introdurre le operazioni aritmetiche (addizione, moltiplicazione, ecc.) con i relativi assiomi. Utilizzeremo soltanto, come *semplice notazione*, la tradizionale espressione $y = x + 1$ invece di $Rnsuc\ x, y$. Da un punto di vista psicologico, oltre che concettuale, il passaggio da un numero al successore corrisponde all'elementare pratica del *contare*, certamente più semplice della pratica dell'*addizionare*.

Da un punto di vista sia logico-matematico che filosofico ha grande interesse il confronto tra il concetto d'insieme e quello di numero naturale. Il modo più classico di realizzare tale confronto è quello di ammettere l'esistenza di un insieme $\mathbf{N}$ a cui appartengono tutti e soli i numeri naturali "veri" (cioè gli oggetti che godono di *Qnnat*) e di corrispondenze biunivoche fra $\mathbf{N}$ e opportuni insiemi di insiemi, ad esempio gli "ordinali finiti di Von Neumann", o addirittura identificare $\mathbf{N}$ con uno di tali insiemi. Potremmo chiamare "neopitagoriche" le esposizioni dell'Aritmetica e della teoria degli insiemi che soddisfano assiomi di questo tipo. Da un punto di vista logico si potrebbero studiare teorie "non pitagoriche" degli insiemi, forse collegabili alla riflessione antica e moderna sul concetto di infinito attuale e potenziale.

Ritorneremo su questo tema nel Capitolo 6, qui concludiamo utilizzando i numeri naturali per introdurre alcune operazioni "combinatorie" (scambi alla Gödel), che intervengono nelle trattazioni "operative" del calcolo dei predicati, di cui ci occuperemo nei Capitoli 3, 4, 5.

Seguendo la linea generale che considera qualità e relazioni come concetti "più primitivi" di quello di operazione, utilizziamo per introdurre le operazioni di scambio la relazione ternaria univoca *Rtsc* .

Assioma 2.4 *Rtsc è una relazione ternaria univoca.*
1) Se Rtsc x, y, z *allora* x, y *sono numeri naturali diversi da* 0 *e diversi tra loro, e* z *è un'operazione semplice.*
2) Se x, y *sono numeri naturali diversi da* 0 *e diversi tra loro allora esiste* z *tale che Rtsc* x, y, z.
3) Se si ha Rtsc h, k, f *e inoltre* $y = fx$, *allora* y, x *sono operazioni totali che prendono come valori operazioni totali.*

L'unico z tale che $Rtsc\ m, n, z$ verrà denotato con T_{mn} oppure $T_{m;n}$. L'azione di scambio esercitata dalle operazioni T_{mn} verrà descritta da un prossimo assioma concepito in modo che sia possibile dedurne le uguaglianze:

$$((T_{1;2}f)x)y = (f\ y)x;$$

$$(((T_{1;3}f)x)y)z = ((f\ z)y)x;$$

$$((((T_{1;4}f)x)y)z)t = (((f\ t)y)z)x;$$

e altre analoghe del tipo:

$$(\ldots((T_{1n}f)x_1)x_2\ldots)x_n = (\ldots(f\ x_n)x_2\ldots)x_1.$$

Vogliamo anche le uguaglianze:

$$(((T_{2;3}f)x)y)z = ((f\ x)z)y;$$

$$((((T_{2;4}f)x)y)z)t = (((f\ x)t)z)y;$$

$$((((T_{3;4}f)x)y)z)t = (((f\ x)y)t)z.$$

$$(((((T_{3;5}f)x)y)z)t)s = ((((f\ x)y)s)t)z.$$

e altre analoghe del tipo:

$$(\ldots(\ldots((T_{mn}f)x_1)\ldots)x_n)\ldots)x_m = (\ldots(\ldots(f\ x_1)\ldots x_m)\ldots)x_n.$$

Tutte queste uguaglianze discendono dall'assioma seguente:

Assioma 2.5
1) $T_{mn} = T_{nm}$*;*
2) se $T_{mn}x$ *esiste allora esiste anche* $T_{mn}(T_{mn}x)$ *ed è uguale a* x*;*
3) se m, n *sono numeri naturali diversi tra loro e diversi da* 0 *e da* 1*, allora* $T_{mn}x$ *esiste se e solo se esistono* $T_{1n}x$ *e* $T_{1m}x$*;*
4) se esistono $T_{hk}x, T_{mn}x$ *allora esiste* $T_{hk}(T_{mn}x)$*.*
5) $T_{1;2}f$ *esiste se e solo se* f *è un'operazione totale a valori operazioni totali e in tal caso si ha* $((T_{1;2}f)x)y = (f\ y)x$ *per ogni* x, y*;*
6) se f *gode di Qtops ed* m, n *sono numeri naturali diversi fra loro e diversi da* 0*, allora esiste* $T_{m+1;n+1}f$ *se e solo se esiste* $T_{mn}f$ *e, per ogni* x*, esiste* $T_{mn}(f\ x)$*; in tal caso si ha* $(T_{m+1;n+1}f)x = T_{mn}(f\ x)$ *per ogni* x*;*
7) se esistono $T_{mh}f, T_{nh}f, T_{mn}f$ *allora si ha* $T_{mh}(T_{mn}(T_{mh}f)) = T_{hn}f$*.*

Capitolo 3: Proposizioni e operazioni predicative

In questo capitolo introduciamo alcune idee molto generali sulle *proposizioni* e i *predicati*. Precisamente introdurremo cinque qualità:
Qgprop, la qualità di essere una *proposizione* di tipo *generale*;
Qclp, la qualità di essere una *proposizione classica*;
Qtgopr, la qualità di essere un'*operazione predicativa totale* di tipo *generale*;
Qclopr, la qualità di essere un'*operazione predicativa classica*;
Qtver, la qualità (di livello elevato) goduta da tutte le *proposizioni vere*;
una relazione binaria:
Rsom, la relazione che collega tra loro oggetti *strutturalmente omogenei*;
e sei operazioni:
Et, l'operazione binaria di *congiunzione* logica;
Vel, l'operazione binaria di *disgiunzione* logica;
Non, l'operazione semplice di *negazione*;
Exist, l'operazione semplice di *quantificazione esistenziale*;
Univ, l'operazione semplice di *quantificazione universale*;
Gopr, l'operazione semplice *generatrice di operazioni predicative elementari.*

Gli assiomi che introdurremo saranno volutamente molto deboli; in particolare quelli che parlano di proposizioni vere e false riguarderanno prevalentemente proposizioni e operazioni predicative "classiche", allo scopo di lasciare la più ampia libertà per eventuali innesti di logiche diverse da quella classica.

Cominciamo perciò introducendo la nozione "più generale" di proposizione mediante la qualità *Qgprop*: quindi scriveremo *Qgprop* x per dire che x è una *proposizione*, senza ulteriori precisazioni. Tra le proposizioni vi sono poi in particolare le proposizioni "classiche" che obbediscono alle regole del calcolo proposizionale classico e sono caratterizzate dalla qualità *Qclp*: quindi *Qclp* x vuol dire che x è una *proposizione classica*. Possiamo enunciare l'assioma:

Assioma 3.1 *Qgprop, Qclp sono qualità. Se Qclp x allora Qgprop x.*

Su tutte le proposizioni agiscono le tradizionali operazioni logiche: *Et* (*congiunzione*), Vel (*disgiunzione* o *alternativa*), Non (*negazione*):

Assioma 3.2 *Et e Vel sono operazioni binarie. Non è un'operazione semplice. Se p, q sono proposizioni allora esistono Et p, q, Vel p, q, Non p e sono proposizioni. Se p, q sono proposizioni classiche allora anche Et p, q, Vel p, q sono classiche. Infine Non p è una proposizione classica se e solo se p è una proposizione classica.*

Seguendo l'uso corrente denoteremo con $p\&q$, $p \vee q$, $\neg p$ le proposizioni *Et* p, q, Vel p, q, Non p.

Poiché la qualità *Qtver* indica la verità "in senso assoluto e totale", scriveremo *Qtver* x per dire che x è *vera* e scriveremo simultaneamente *Qgprop* p, *Qtver* p per dire che p è una *proposizione vera*. Quando p è una proposizione e $\neg p$ gode della qualità *Qtver* diremo anche che p è *falsa*.

Il seguente assioma collega le proposizioni classiche alla qualità *Qtver*, esprimendo tra l'altro i classici principi di *non contraddizione* e del *terzo escluso:*

Assioma 3.3 *Qtver è una qualità. Se p, q sono proposizioni classiche allora:*
1) p gode di Qtver se e solo se $\neg$ p non gode di Qtver.
2) $p\&q$ gode di Qtver se e solo se p e q ne godono entrambe.
3) $p \vee q$ gode di Qtver se e solo se almeno una tra p e q ne gode.

Introdotte così le proposizioni, possiamo riprendere il concetto classico di predicato "alla Frege" (vedi [19]), cioè come *operazione a valori proposizioni.* Sono ovviamente possibili molte e differenti introduzioni (vedi ad esempio [5,12,14,24,25,26]). In questa esposizione considereremo operazioni semplici totali che generano proposizioni immediatamente, oppure dopo alcune iterazioni. Per questo considereremo le *operazioni predicative totali* di tipo *generale* (caratterizzate dalla qualità *Qtgopr*), le *operazioni predicative classiche* (caratterizzate dalla qualità *Qclopr*) e la relazione di *omogeneità strutturale*, *Rsom*. Le qualità *Qgprop*, *Qclp*, *Qtgopr*, *Qclopr*, la relazione *Rsom* e le operazioni di scambio T_{hk} considerate nell'Assioma 2.5 sono collegate fra loro dal seguente assioma:

Assioma 3.4 *Qtgopr, Qclopr sono qualità, Rsom è una relazione binaria.*
1) Per ogni scelta di $x, y, z,$ se si ha Rsom x, y, Rsom y, z, allora si ha anche

Rsom x, x, *Rsom* y, x, *Rsom* x, z.
2) Se α *è una proposizone e* β *è un oggetto qualunque allora si ha Rsom* α, β *se e solo se* β *è una proposizione.*
3) Se Qtgopr f *mentre* g *è un oggetto qualunque, allora si ha Rsom* f, g *se e solo se Qtgopr* g *e vale Rsom* fx, gx *per ogni* x.
4) Si ha Qtgopr f *se e solo se sono soddisfatte le condizioni seguenti:*
4.1) f *gode di Qtops;*
4.2) per ogni x, $f\ x$ *gode di Qtgopr oppure di Qgprop;*
4.3) per ogni x, y *si ha Rsom* fx, fy.
5) Se f *gode di Qtgopr ed esiste* $T_{hk}f$ *allora si ha Rsom* $f, T_{hk}f$.
6) Se f *gode di Qclopr allora* f *gode di Qtgopr; inoltre, per ogni* x, $f\ x$ *gode di Qclp oppure di Qclopr.*
7) Se f *gode di Qclopr ed esiste* $T_{hk}f$, *allora anche* $T_{hk}f$ *gode di Qclopr.*

Alle operazioni predicative totali si applicano il *quantificatore esistenziale* e il *quantificatore universale* che soddisfano l'assioma seguente:

Assioma 3.5 *Univ ed Exist sono operazioni semplici.*
1) Se f *è un'operazione predicativa totale a valori proposizioni, allora esistono Univ* f *ed Exist* f *ed entrambe sono proposizioni;*
2) Se f *gode di Qtgopr e, per ogni* x, $f\ x$ *gode di Qtgopr, allora Univ* f *ed Exist* f *esistono, godono di Qtgopr e si ha:*
2.1) $(Univ\ f)x = Univ(f\ x)$ *per ogni* x;
2.2) $(Exist\ f)x = Exist(f\ x)$ *per ogni* x.
3) Se f *gode di Qclopr allora Univ* f *ed Exist* f *godono di Qclopr oppure di Qclp.*
4) Se f *gode di Qclopr e i suoi valori sono proposizioni allora si ha:*
4.1) Univ f *è vera se e solo se la proposizione* $f\ x$ *è vera per ogni* x;
4.2) Exist f *è vera se e solo se, per almeno un oggetto* x, *la proposizione* $f\ x$ *è vera.*

Utilizzeremo spesso le notazioni più comuni $\forall p$, $\exists p$ in luogo di *Univ* p, *Exist* p; quando i valori di p sono proposizioni useremo anche le notazioni $\forall x.px$; $\forall y.py$; ecc. in luogo di *Univ* p e analogamente $\exists x.px$; $\exists y.py$, ecc. in luogo di *Exist* p: ciò non comporta naturalmente il riferimento a nessun oggetto specifico x, y, ecc.

Anche le operazioni di congiunzione, disgiunzione e negazione agiscono sulle operazioni predicative totali, secondo le seguenti regole di commutazione:

Assioma 3.6 *Siano* f, g *operazioni predicative totali e sia Rsom* f, g. *Allora*
1) Esiste Non f, *è un'operazione predicativa totale e si ha* $(Non\ f)x = Non(f\ x)$ *per ogni* x.
2) Esiste Et f, g, *è un'operazione predicativa totale e si ha* $(Et\ f, g)x = Et\ fx, gx$ *per ogni* x.
3) Esiste Vel f, g, *è un'operazione predicativa totale e si ha* $(Vel\ f, g)x = Vel\ fx, gx$ *per ogni* x.
4) Non f *è classica se e solo se* f *è classica;*
5) Se f, g *sono entrambe classiche anche Et* f, g, *Vel* f, g *sono classiche.*

Anche nel caso di operazioni predicative totali useremo le notazioni correnti $f\&g, f \vee g, \neg f$ in luogo rispettivamente di $Et\ f, g,\ Vel\ f, g,\ Non\ f$.

Il collegamento tra qualità, relazioni, operazioni e le proposizioni che ne descrivono l'azione è realizzato dall'operazione *Gopr*, generatrice di *operazioni predicative elementari*. Non tutte le operazioni prodotte da *Gopr* saranno classiche: vedremo in effetti nel Capitolo 5 come *Gopr* ρ, per alcune relazioni ρ, non gode di *Qclopr*. L'operazione *Gopr* verifica i seguenti assiomi:

Assioma 3.6 *Gopr è un'operazione semplice.*
Se τ è una relazione quaternaria, allora:
1) Gopr τ è un'operazione predicativa totale;
2) per ogni oggetto x, $(Gopr\ \tau)x$ è un'operazione predicativa totale;
3) per ogni x, y, $((Gopr\ \tau)x)y$ è un'operazione predicativa totale;
4) per ogni x, y, z, $((Gopr\ \tau)x)y)z$ è un'operazione predicativa totale;
5) per ogni x, y, z, t, $(((Gopr\ \tau)x)y)z)t$ è una proposizione;
6) per ogni x, y, z, t, la proposizione $(((Gopr\ \tau)x)y)z)t$ gode di Qtver se e solo se si ha $\tau\ x, y, z, t$ (cioè se e solo se x, y, z, t sono nella relazione τ).

Il punto 6 dell'assioma precedente giustifica la notazione abbreviata

$$"\tau\ x, y, z, t" = ((((Gopr\ \tau)x)y)z)t.$$

Confrontando il punto 6 dell'assioma 3.6 con gli assiomi precedenti si constata un interessante fenomeno di *mutua referenza*: da una parte le relazioni quaternarie descrivono indirettamente, attraverso *Rrelt*, *Rrelb*, *Rqual*, *Rops*, sia le qualità che le operazioni semplici; dall'altra l'operazione semplice *Gopr* e la qualità *Qtver* descrivono attraverso l'assioma 3.6 le relazioni quaternarie. Questa circolarità giustifica la scelta, fatta nel capitolo 1, di fermarsi alle relazioni quaternarie, che hanno anche il pregio di descrivere, attraverso *Ropb*, le operazioni binarie.

Una volta descritto il comportamento dell'operazione *Gopr* sulle relazioni quaternarie è facile passare alle altre specie di oggetti introdotti nei capitoli precedenti nel modo seguente:

Assioma 3.7 *1) Se ρ è una relazione ternaria allora $Gopr\ \rho = (Gopr\ Rrelt)\rho$.*
2) Se r è una relazione binaria allora $Gopr\ r = (Gopr\ Rrelb)r$.
3) Se q è una qualità allora $Gopr\ q = (Gopr\ Rqual)q$.
4) Se f è un'operazione semplice allora $Gopr\ f = (Gopr\ Rops)f$.
5) Se φ è un'operazione binaria allora $Gopr\ \varphi = (Gopr\ Ropb)\varphi$.

Le proposizioni "elementari" generate dai predicati ottenuti mediante l'operazione *Gopr* sono asserzioni riguardanti le qualità o le relazioni a cui si è applicato *Gopr*, perciò estendiamo la notazione virgolettata nel modo naturale:
se q è una qualità allora "$q\ x$" sta per $(Gopr\ q)x$;
se r è una relazione binaria, allora "$r\ x, y$" sta per $((Gopr\ r)x)y$;
se ρ è una relazione ternaria, allora "$\rho\ x, y, z$" sta per $(((Gopr\ \rho)x)y)z)$;
infine "$x = y$" sta per $((Gopr\ Rid)x)y$, e "$x \neq y$" sta per $\neg(((Gopr\ Rid)x)y)$.

Poiché sia la relazione *Rid* sia l'operazione *Id* parlano dell'identità tra oggetti, poniamo l'assioma:

Assioma 3.8 *Per ogni scelta degli oggetti* x, y *si ha*

$$((Gopr\ Id)x)y = ((Gopr\ Rid)x)y = ((Gopr\ Rid)y)x.$$

Dopo aver introdotto le proposizioni e le operazioni predicative, le operazioni logiche Et, Vel, Non, $Exist$, $Univ$, e i "predicati elementari" definiti attraverso $Gopr$, si presenta il problema della ricerca di "assiomi di classicità" che non portino a contraddizioni.

Risultati negativi, sostanzialmente ispirati all'antinomia del mentitore (o al teorema di Tarski), sono stati dimostrati in situazioni analoghe, vedi [12,14] e saranno discussi qui nel Capitolo 5. La ricerca dei più forti assiomi positivi che non portano a contraddizioni è ancora aperta.

Capitolo 4: Verità e soggetti giudicanti

In questo capitolo introduciamo quattro qualità:
$Qjuds$, la qualità di essere un *soggetto giudicante*;
$Qcljq$, la qualità di essere una *qualità giudicatrice classica*;
Qmq, la qualità di essere una *metaqualità*;
Qmr, la qualità di essere una *metarelazione*;
e una relazione binaria:
$Rjud$, la relazione che collega i soggetti giudicanti con gli oggetti attinenti al loro giudizio.

Poiché la qualità $Qtver$, esprimendo la "verità assoluta", si trova ad un livello così elevato da rendere praticamente impossibile assoggettarla alle usuali manipolazioni logico-matematiche, appare opportuno introdurre "concetti intermedi" che possano fornire la desiderata flessibilità e praticità d'uso. Introduciamo quindi la qualità $Qjuds$ di essere un *soggetto giudicante* e la corrispondente relazione $Rjud$ di *attinenza al giudizio* con l'assioma:

Assioma 4.1 *Qjuds è una qualità e Rjud è una relazione binaria.*
Se $Rjud\ x, y$ *allora* $Qjuds\ x$.

Sono naturalmente possibili svariatissimi tipi di giudizio: per esempio si può giudicare qualche oggetto vero, falso, buono, cattivo, necessario, possibile, contingente, colpevole, innocente, ecc. In questo articolo siamo interessati soprattutto ai giudizi sulla verità delle proposizioni classiche e pertanto abbiamo introdotto la qualità $Qcljq$ di essere una *qualità giudicatrice di proposizioni classiche* . Poniamo perciò l'assioma:

Assioma 4.2 *Qcljq è una qualità.*
Se $Qcljq\ x$ *allora* $Qjuds\ x$ *e* $Qqual\ x$.
1) Se α *è una proposizione,* μ *gode di Qcljq allora:*
1.1) se α *gode di* μ *allora* α *è classica e vera;*
1.2) si ha $Rjud\ \mu, \alpha$ *se e solo se* α *oppure* $\neg\alpha$ *gode di* μ.
2) Se α, β *sono proposizioni,* μ *gode di Qcljq e si ha* $Rjud\ \mu, \alpha$, $Rjud\ \mu, \beta$ *allora si ha anche* $Rjud\ \mu, \alpha\&\beta$, $Rjud\ \mu, \alpha \vee \beta$.
3) Se f *è un'operazione predicativa totale e* μ *gode di Qcljq, allora si ha* $Rjud\ \mu, f$ *se e solo se per ogni* x *si ha* $Rjud\ \mu, fx$.

4) Se f è un'operazione predicativa totale, μ gode di $Qcljq$ e si ha $Rjud\ \mu, f$, allora si ha anche $Rjud\ \mu, \exists f$, $Rjud\ \mu, \forall f$.
5) Se f è un'operazione predicativa totale, esiste $T_{hk}f$, μ gode di $Qcljq$ e si ha $Rjud\ \mu, f$, allora si ha anche $Rjud\ \mu, T_{hk}f$.

Se μ gode di $Qcljq$ ed α è una proposizione, allora diremo che μ *giudica* α, ovvero che α è *giudicata* da μ, invece di scrivere $Rjud\ \mu, \alpha$; se f è un'operazione predicativa diremo che f *attiene al giudizio* di μ, ovvero che μ *considera* f (nei suoi giudizi), invece di scrivere $Rjud\ \mu, f$.

Stabiliamo ora che proposizioni e operazioni predicative classiche sono caratterizzate dalla possibilità di essere sottoposte al giudizio di una qualità giudicatrice di proposizioni classiche.

Assioma 4.3 *1) Sia α una proposizione: allora α gode di $Qclp$ se e solo se esiste μ che gode di $Qcljq$, tale che $Rjud\ \mu, \alpha$.*
2) Un'operazione predicativa totale f gode di $Qclopr$ se e solo se esiste μ che gode di $Qcljq$, tale che $Rjud\ \mu, f$.

Il collegamento tra qualità giudicatrici, metaqualità e metarelazioni è stabilito dal seguente assioma:

Assioma 4.4 *Qmq e Qmr sono qualità.*
1) Si ha $Qmq\ x$ se e solo se $Qqual\ x$ e $Gopr\ x$ gode di $Qclopr$;
2) Si ha $Qmr\ x$ se e solo se $Qrel\ x$ e $Gopr\ x$ gode di $Qclopr$.

Per poter giudicare simultaneamente più oggetti "singolarmente" giudicabili conviene assumere che date due qualità giudicatrici di proposizioni classiche ve n'è una terza "più competente":

Assioma 4.5 *Se μ_1, μ_2 godono di $Qcljq$ esiste ν che gode di $Qcljq$ e verifica le condizioni:*
$Rjud\ \mu_1, x$ implica $Rjud\ \nu, x$;
$Rjud\ \mu_2, x$ implica $Rjud\ \nu, x$.

Infine vogliamo assicurare la classicità di molte proposizioni e operazioni predicative interessanti. Per questo poniamo:

Assioma 4.6 *Le qualità che godono di $Qcljq$ godono anche di Qmq; inoltre godono di Qmq anche le seguenti qualità:*
Qqual, Qrel, Qrelb, Qrelt, Qrelq, Qop, Qops, Qopb, Qtops, Qgprop, Qtgopr.
Le seguenti relazioni godono di Qmr:
Rid, Rops, Ropb, Rsom.

Capitolo 5: Un teorema ispirato all'antinomia del mentitore

Utilizzando le operazioni predicative elementari generate da $Gopr$ e le manipolazioni permesse dagli assiomi dei Capitoli 3-4 è possibile esprimere praticamente ogni proposizione e predicato "del primo ordine" che coinvolge gli oggetti considerati in questo articolo. È interessante notare che queste potenzialità sono già sufficienti non solo per dimostrare l'impossibilità che *Gopr Qtver* sia un'operazione predicativa classica, ma anche per vedere che è necessaria un'intera "gerarchia" di qualità giudicatrici classiche, gerarchia che non ammette una metaqualità dominante.

Cominciamo con lo stabilire il seguente lemma:

Lemma 1. *Esiste un'operazione predicativa classica F tale che, per ogni x, y, $(Fx)y$ è una proposizione vera se e solo se x è un'operazione predicativa totale, y è una proposizione e si ha*

$$y = \neg(xx)$$

.

Dimostrazione. Sia $P = \mathit{Gopr\ Rops}$, $Q_0 = \mathit{Gopr\ Qgprop}$, $Q_1 = \mathit{Gopr\ Qtgopr}$ e pongasi:
$F_0 = K(K(KQ_0))$, quindi $(((F_0x)y)z)t =$"*Qgprop* t", ossia "t è una proposizione";
$F_1 = T_{1;4}(K(K(KQ_1))$, quindi $(((F_1x)y)z)t =$"*Qtgopr* x", ossia "x è un'operazione predicativa totale";
$F_2 = T_{1;2}(T_{2;3}(T_{3;4}(KP)))$, quindi $(((F_2x)y)z)t =$"*Rops* x, y, z", ossia "l'operazione x applicata a y dà il valore z";
$F_3 = T_{2;3}(T_{1;4}(K(K(P\ Id))))$, quindi $(((F_3x)y)z)t =$"*Rops* Id, y, x", ossia "$x = y$";
$F_4 = K(K(P\ Non))$, quindi $(((F_4x)y)z)t =$"*Rops* Non, z, t", ossia "$t = \neg z$".

Poniamo ora:
$F_5 = F_0\&(F_1\&(F_2\&(F_3\&F_4)))$;
$F_6 = T_{2;4}F_5$, quindi $(((F_6x)y)z)t$ dice che "x è un'operazione predicativa totale, y è una proposizione, $t = x$, $z = xt$, $y = \neg z$";
$F_7 = \exists F_6$, quindi $((F_7x)y)z = \exists t.(((F_6x)y)z)t$, ossia "$x$ è un'operazione predicativa totale, y è una proposizione, $z = xx$, $y = \neg z$";
$F = \exists F_7$ quindi $(Fx)y = \exists z.((F_7x)y)z$, ossia "$x$ è un'operazione predicativa totale, y è una proposizione, $y = \neg(xx)$".

Chiaramente F è classica, poiché *Qgprop*, *Qtgopr* sono metaqualità, mentre *Rops* è una metarelazione. **QED**

Per vedere come il Lemma 1 ed i successivi teoremi siano ispirati all'antinomia del mentitore osserviamo che, interpretando intuitivamente la proposizione xx come "ciò che x afferma di se stesso", la verità di y e di $(Fx)y$ implica la falsità di "ciò che x afferma di se stesso". Torneremo su questa interpretazione dopo il Teorema 2, intanto mostriamo come si ottiene dal Lemma 1 un teorema analogo al Teorema di Tarski (vedi[29]):

Teorema 1. *Sia F come nel Lemma 1. Allora l'operazione predicativa*

$$F\&K(\mathit{Gopr\ Qtver})$$

non è classica. Di conseguenza la qualità Qtver non è una metaqualità.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'operazione $F\&K(\mathit{Gopr\ Qtver})$ sia classica; allora è classica anche l'operazione

$$G = \exists\ (F\&K(\mathit{Gopr\ Qtver}))$$

e si ha per ogni x
$Gx = \exists y.((Fx)y\,\&$ "*Qtver* y"$)$, ossia "x è un'operazione predicativa totale e $\neg(xx)$ è una proposizione vera".

Posto allora $x = G$ si ottiene in particolare che GG è una proposizione vera (gode di $Qtver$) se e solo se G è un'operazione predicativa totale e $\neg(GG)$ è una proposizione vera (gode di $Qtver$). Ma questo è contraddittorio se GG è una proposizione classica, perché allora una e una sola fra GG e $\neg(GG)$ deve godere di $Qtver$.**QED**

Come si vede dall'Assioma 3.7, per ottenere l'operazione *Gopr Qtver* possono essere utilizzate le operazioni predicative elementari *Gopr Rrelq*, *Gopr Rrelt*, *Gopr Rrelb*, *Gopr Rqual*; quindi dal Teorema 1 segue immediatamente

Corollario. *Le relazioni Rrelq, Rrelt, Rrelb, Rqual non sono metarelazioni (cioè non godono di Qmr).*

Possiamo utilizzare il Lemma 1 anche per dimostrare che non esiste una qualità giudicatrice classica "dominante", in quanto nessuna qualità giudicatrice classica può giudicare *tutte* le proposizioni classiche.

Teorema 2. *Sia F come nel Lemma 1 e sia μ una qualità giudicatrice classica che considera F, cioè tale che valga $Rjud\ \mu, F$. Posto*

$$H = \exists\ (F \& K(Gopr\ \mu)),$$

si ha che la proposizione classica HH è falsa, ma non è giudicata da μ.

Ne segue che μ non considera il predicato $Gopr\ \mu$, cioè non vale $Rjud\ \mu, Gopr\ \mu$.

Dimostrazione. Si ha per ogni x
$Hx = \exists y.((Fx)y\,\&\,\text{“}\mu y\text{”})$, ossia "$x$ è un'operazione predicativa totale e $\neg(xx)$ è una proposizione che gode di μ".

Posto allora $x = H$ si ha:

i) se vale $\mu(HH)$ allora HH è una proposizione classica vera, quindi $\neg(HH)$ gode di μ, assurdo.

ii) se vale $\mu(\neg(HH))$ allora HH è una proposizione classica falsa; quindi, essendo H un'operazione predicativa totale, deve essere falsa la proposizione "$\mu(\neg(HH))$", assurdo;

Dunque non è possibile che μ giudichi HH, cioè che valga $Rjud\ \mu, (HH)$. Pertanto μ non considera il predicato H e, poiché per ipotesi considera F, non può considerare $Gopr\ \mu$. D'altra parte la *i)* implica che HH non può godere di $Qtver$, e quindi essendo una proposizione classica deve essere falsa. **QED**

Tornando all'analogia intuitiva con l'antinomia del mentitore, potremmo chiamare l'operazione H del Teorema 2 un "μ-mentitore", e considerare la proposizione HH "ciò che H dice di se stesso". Allora potremmo dire che H afferma nello stesso tempo di mentire e di essere giudicato mentitore da μ; la prima affermazione è vera, la seconda è falsa, la loro congiunzione, per l'Assioma 3.3 è falsa. Intuitivamente potremmo dire che il "μ-mentitore" mente, ma μ non è in grado di smentirlo!

Capitolo 6. Osservazioni conclusive

I Capitoli 2, 3, 4 di questo lavoro rapppresentano l'innesto di alcuni oggetti matematici e logici sul tronco delle qualità e relazioni fondamentali introdotte in [11] e riprese nel Capitolo 1. I teoremi del Capitolo 5 rappresentano il "collaudo" di tale innesto attraverso il confronto con la cruciale antinomia del mentitore.

Molti altri innesti sono possibili e tutte le idee finora esposte possono essere sviluppate con grande libertà in molte direzioni diverse. Per esempio, tra i soggetti giudicanti si potrebbero considerare, oltre alle qualità giudicatrici, anche *operazioni* o *relazioni giudicatrici*; basta introdurre con opportuni assiomi operazioni o relazioni univoche booleane, che associano il numero 1 a proposizioni vere e il numero 0 a proposizioni false. Si possono anche considerare, oltre alla logica classica, con due valori di verità, logiche con più valori di verità, o, più in generale, introdurre logiche dei tipi più vari, con le loro operazioni sintattiche e le loro interpretazioni semantiche.

Passando agli argomenti più tipici della Matematica, si possono innestare (come è stato fatto in [11]):
gli *insiemi* mediante la qualità $Qins$ e la relazione binaria $Rins$;
le *collezioni* mediante la qualità $Qcoll$ e la relazione binaria $Rcoll$;
le *funzioni* mediante la qualità $Qfun$ e la relazione ternaria univoca $Rfun$;
le *correlazioni* mediante la qualità $Qcorr$ e la relazione ternaria $Rcorr$.

Se ammettiamo che $Qins$, $Qcoll$, $Qfun$, $Qcorr$ sono metaqualità, mentre $Rins$, $Rcoll$, $Rfun$, $Rcorr$ sono metarelazioni, abbiamo un buon contesto in cui inserire le teorie degli insiemi, cominciando da quelle di Zermelo-Frænkel e di Gödel-Bernays-VonNeumann.

Dalle teorie degli insiemi si può passare allo studio del collegamento tra insiemi e numeri naturali: sono possibili impostazioni "neopitagoriche" e "non pitagoriche". La prima importante decisione di chi sceglie un'impostazione "neopitagorica" è quella di ammettere che $Qnnat$ sia una metaqualità e $Rnsuc$ una metarelazione. Questa decisione è infatti necessaria per fare dei numeri naturali "veri" la base maneggevole della Matematica, della Logica, dell'Informatica.

Dall'Aritmetica si può passare all'Analisi, costruendo nei modi consueti i numeri razionali e i numeri reali. Sarebbe forse più interessante passare direttamente dalla teoria generale degli insiemi e delle funzioni all'innesto dei *numeri reali generali*, comprendenti reali standard e non standard, come oggetti di *tipo qualitativamente nuovo.* A tale scopo si potrebbero introdurre la qualità $Qgreal$ di essere un numero reale generale e le operazioni binarie $Gradd$ (*addizione* di due numeri reali generali), $Grmult$ (*moltiplicazione* di due numeri reali generali). Si introdurrebbero poi vari modelli dell'Analisi (standard e non standard): ad ogni modello $\mathcal{M}$ sarebbe associato un insieme $\mathbf{R}^{\mathcal{M}}$, *insieme dei numeri reali di* $\mathcal{M}$, i cui elementi dovrebbero sempre godere di $Qgreal$.

Oltre all'Analisi standard e non standard, alle logiche classiche e non classiche, si potrebbero innestare molti altri rami della Matematica, della Logica, dell'Informatica, introducendo variabili, categorie, algoritmi, probabilità, informazione, etc.. I più audaci potrebbero tentare l'innesto di rami di altre discipline introducendo, per esempio, leggi fisiche, biologiche, economiche, teorie ed esperimenti che le confermano o smentiscono, principi etici o giuridici, linguaggi naturali e artificiali, etc..

È difficile programmare l'esplorazione del mondo vario, ricco, colorato che dovrebbe ampliare il "paradiso di Cantor". Si può solo dire che il successo dell'esplorazione dipenderà probabilmente dal numero e dalla varietà degli "esploratori", dalla loro sensibilità nell'apprezzare le migliori tradizioni e le maggiori conquiste culturali del passato unita alle capacità di intuire quali potrebbero essere le innovazioni più valide e più feconde. Soprattutto sembra necessario unire fantasia e rigore scientifico, intendendo il rigore nel significato più ampio che è stato delineato in [11], ove si afferma:

"Ogni ricerca sugli assiomi fondamentali di Matematica, Logica e Informatica, come pure delle diverse scienze sperimentali, umanistiche, filosofiche comporta fra l'altro il superamento di una visione troppo chiusa delle diverse specializzazioni ed un'idea più ampia del rigore matematico o scientifico. Il rigore matematico non è solo accuratezza nelle dimostrazioni ma anche impegno a esporre nel modo più chiaro e comprensibile i problemi che si vorrebbero risolvere, i teoremi che si vorrebbero dimostrare, le congetture che si vorrebbero verificare o confutare. Noi riteniamo che il rigore scientifico consista soprattutto nell'esporre chiaramente e liberamente le proprie certezze e i propri dubbi, i problemi che si ritiene di aver risolto e quelli che si vorrebbe risolvere o vedere risolti, evitando solo quei discorsi confusi, oscuri, inutilmente complicati che finiscono con l'annoiare anche l'ascoltatore meglio disposto.

In ultima analisi dobbiamo concludere che ogni discorso sul metodo scientifico, sul rigore scientifico e sul significato della Scienza ci riporta alla fine alle più antiche intuizioni sui valori sapienziali dell'umiltà, della "convivialità" (che è insieme condivisione del sapere, amicizia, ricerca di reciproca comprensione) e della fiducia nella Sapienza che viene incontro a coloro che la amano e la cercano."

BIBLIOGRAFIA

[1] J. BARWISE, J. ETCHEMENDY – *The Liar*, Oxford 1987.

[2] Y. BAR HILLEL, A. A. FRAENKEL, A. LEVY – *Foundations of set theory*, Amsterdam 1973.

[3] L.E. J. BROUWER, *Wiskunde, waarheid, werkelijkheid*, Groningen 1919.

[4] A. CHURCH – A Set of Postulates for the Foundation of Logic, *Ann. Math.* **33** (1932), 346-366. Second paper, *ibid* **34** (1933), 837-864.

[5] M. CLAVELLI, E. DE GIORGI, M. FORTI, V. M. TORTORELLI – A selfreference oriented theory for the Foundations of Mathematics, in *Analyse Mathématique et applications – Contributions en l'honneur de Jacques-Louis Lions*, Parigi 1988, pp. 67-115.

[6] E. DE GIORGI – Contributo alla sessione *"Fundamental Principles of Mathematics"*, Plenary Session of the Pontifical Academy of Sciences (25-29 October 1994), 1994.

[7] E. DE GIORGI – *Riflessioni sui Fondamenti della Matematica*, Conferenza per il centenario della società "Mathesis", Roma, 23 ottobre 1995, dattiloscritto.

[8] E. DE GIORGI, M.FORTI – Una teoria quadro per i fondamenti della Matematica, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **79** (1985), 55-67.

[9] E. DE GIORGI, M. FORTI – *"5×7": A Basic Theory for the Foundations of Mathematics*, Preprint di Matematica n. 74, Scuola Normale Superiore, Pisa 1990.

[10] E. DE GIORGI, M. FORTI, G. LENZI – Una proposta di teorie base dei Fondamenti della Matematica, *Rend. Mat. Acc. Lincei*, (9) **5** (1994), 11- 22.

[11] E. DE GIORGI, M. FORTI, G. LENZI – *Verso i sistemi assiomatici del 2000 in Matematica, Logica e Informatica*, Preprint di Matematica n. 26, Scuola Normale Superiore, Pisa 1996.

[12] E. DE GIORGI, M. FORTI, G. LENZI, V. M. TORTORELLI – Calcolo dei predicati e concetti metateorici in una teoria base dei Fondamenti della Matematica, *Rend. Mat. Acc. Lincei*, (9) **6** (1995), 79-92.
[13] E. DE GIORGI, M. FORTI, V. M. TORTORELLI – Sul problema dell'autoriferimento, *Atti Acc. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **80** (1986).
[14] E. DE GIORGI, G. LENZI – La teoria '95. Una proposta di teoria aperta e non riduzionistica dei fondamenti della Matematica, apparirà sugli *Atti dell'Accademia dei XL*, 1995.
[15] E. DE GIORGI, A. PRETI – Anche la scienza ha bisogno di sognare, *Quotidiano di Lecce*, 6 Gennaio 1996.
[16] M. FORTI, F. HONSELL – Models of self-descriptive set theories, in *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations – Essays in Honor of Ennio De Giorgi* (F. Colombini et al., eds), Boston 1989, 473-518.
[17] M. FORTI, F. HONSELL – Sets and classes within the basic theories for the Foundations of Mathematics, in *Proceedings of the International Conference on Logic and Algebra in Memory of Roberto Magari* (F. Montagna and A. Ursini, eds.) 1996, in corso di pubblicazione.
[18] M. FORTI, F. HONSELL, M. LENISA – *An axiomatization of partial n-place operations*, Quaderni dell'Istituto di Matematiche Applicate "U. Dini", Facoltà di Ingegneria, Università di Pisa, 1995\4.(Apparirà su *Mathematical Structures in Computer Science*)
[19] G. FREGE – *Grundgesetze der Aritmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. 1 Jena 1893, vol. 2 Pohle, Jena 1903 (ristampato Olms, Hildesheim 1962).
[20] M. GRASSI, G. LENZI, V. M. TORTORELLI – A formalization of a basic theory for the foundations of Mathematics, *Rend. Acc. Naz. Sci. dei XL, Mem. Mat. Appl.* **19** (1995), 129-157.
[21] A. HEYTING, *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie.* Berlino, 1934.
[22] D. HILBERT, *Über das Unendliche*, Math. Annalen **88** (1923), pp. 151-165.
[23] G. LENZI – Estensioni contraddittorie della teoria Ampia, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat.*, (8) **83** (1989), 13-28.
[24] G. LENZI (curat.) – *Seminario sui Fondamenti della Matematica di E. De Giorgi - Scuola Normale Superiore di Pisa - aa.aa. 1993/94 e segg..* Pisa 1994, 1995, 1996 (Note dattiloscritte).
[25] G. LENZI, V. M. TORTORELLI – *Introducing predicates into a basic theory for the foundations of Mathematics*, Scuola Normale Superiore, preprint di Matematica n. 51, 1989.
[26] G. LENZI, V. M. TORTORELLI – *A basic theory with predicates*, preprint del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, n. 1.141.913, 1996.
[27] A. ROBINSON – *Non-standard Analysis.* Amsterdam 1974.
[28] B. RUSSELL, A. N. WHITEHEAD – *Principia Mathematica*, Cambridge 1925.
[29] D. SCOTT – Combinators and classes, in *λ-Calculus and Computer Science Theory* (C. Böhm, ed.), Lecture Notes in Computer Science **37**, Berlino 1975.
[30] A. TARSKI – *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford 1956.
[31] J. VON NEUMANN – Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *J. f. reine und angew. Math.* **154** (1925), 219-240.

E. De Giorgi, G. Lenzi
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri 7
I-56100 PISA (Italy)
email: lenzi@sabsns.sns.it

M. Forti
Dipart. Matem. Applicata "U. Dini"
Via Bonanno 25 B
I-56100 PISA (Italy)
email: forti@dm.unipi.it